

Funkcie

$X, Y \subseteq \mathbb{R}$

usporiadaná dvojica čísel – dve čísla v danom poradí (záleží na poradí)

zápis: $[x; y]$ alebo $(x; y)$

$$[x; y] = [y; x] \Leftrightarrow x = y$$

karteziánsky (kartézsky) súčin množín – množina všetkých usporiadaných dvojíc vytvorených z prvkov množín: na prvé miesta idú čísla z prvej množiny a na druhé z druhej

$$X \times Y := \{[x; y] \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

$$\text{ak } |X| = n \text{ a } |Y| = m \Rightarrow |X \times Y| = n \cdot m$$

pr. $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}; Y = \{10; 20; 30; 40\}$

$$X \times Y = \{[1; 10]; [1; 20]; [1; 30]; [1; 40];$$

$$[2; 10]; [2; 20]; [2; 30]; [2; 40];$$

$$[3; 10]; [3; 20]; [3; 30]; [3; 40];$$

$$[4; 10]; [4; 20]; [4; 30]; [4; 40];$$

$$[5; 10]; [5; 20]; [5; 30]; [5; 40]\}$$

D. Funkcia je takou podmnožinou karteziánskeho súčinu dvoch číselných množín, v ktorej na prvých miestach v usporiadaných dvojiciach patriacich do funkcie sa neopakuje ani jeden prvok.

$$f \subset X \times Y$$

$$f := \{[x; y] \mid x \in X \wedge y \in Y; \forall [x_1; y_1]; [x_2; y_2] \in f \wedge x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2\}$$

D. (krátka verzia) Ku každému jednému x je priradený iba jeden y .

zápis:

$$f: y = \text{predpis}$$

$$f(x) = \text{predpis}$$

$$f: x \mapsto \text{predpis}$$

pr. $f = \{[1; 30]; [2; 10]; [5; 20]\}$

$$g = \{[1; 20]; [2; 30]; [3; 40]; [4; 10]; [5; 40]\}$$

$$h = \{[1; 40]; [3; 20]; [4; 30]; [5; 10]\}$$

protipríklad: $i = \{[1; 10]; [2; 20]; [3; 20]; [4; 20]; [4; 40]; [5; 30]\}$

definičný obor funkcie (D_f) – množina x -ových hodnôt (argumentov, nezávislých premenných), ktoré sú na prvých miestach v usporiadaných dvojiciach patriacich do funkcie

$$D_f \subseteq X$$

$$D_f := \{x \mid \exists y: [x; y] \in f\}$$

$$\text{pr. } D_f = \{1; 2; 5\}, D_g = \{1; 2; 3; 4; 5\}, D_h = \{1; 3; 4; 5\}$$

obor funkčných hodnôt (H_f) – množina y -ových hodnôt (funkčných hodnôt, závislých premenných), ktoré sa vyskytujú na druhom mieste v usporiadaných dvojiciach patriacich do funkcie

$$H_f \subseteq Y$$

$$H_f := \{y \mid \exists x: [x; y] \in f\}$$

$$\text{pr. } H_f = \{10; 20; 30\}, H_g = \{10; 20; 30; 40\}, H_h = \{10; 20; 30; 40\}$$

súradnicová sústava – dve priamky + jednotky na osiach

x -ová os: abscisa

y -ová os: ordináta

ortogonálna sústava: pravouhlá

klinogonálna sústava: kosouhlá

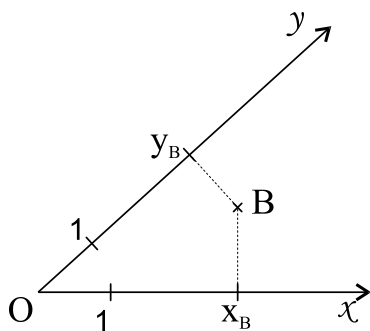
ortonormálna (karteziánska) sústava: pravouhlá + rovnaké jednotky

P. kosouhlá (šikmá) sústava: osi nie sú kolmé

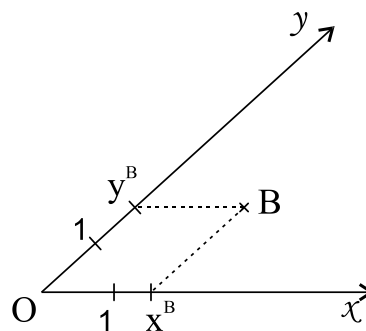
kovariantné a kontravariantné súradnice

kovariantné súradnice: kolmo na os – $B(x_B; y_B)$

kontravariantné súradnice: rovnobežne s druhou osou – $B(x^B; y^B)$



kovariantné súradnice



kontravariantné súradnice

krivočiara sústava: osi sú krivky

graf funkcie – súhrn usporiadaných dvojíc umiestnených v súradnicovej sústave

injektívna (prostá) funkcia – na druhých miestach v usporiadaných dvojiciach patriacich do funkcie sa neopakuje ani jeden prvok

$$f := \{\forall [x_1; y_1]; [x_2; y_2] \in f \wedge y_1 = y_2 \Rightarrow x_1 = x_2\}$$

funkcie f a h sú injektívne

surjektívna (funkcia na množinu Y) funkcia – každý prvok druhej (Y) množiny nadobudne (je pridelený) funkcia aspoň raz

$$H_f = Y$$

$$H_f = \{y | \forall y \in Y \Rightarrow \exists x: [x; y] \in f\}$$

funkcie g a h sú surjektívne

bijektívna (jednoznačná) funkcia – aj injektívna aj surjektívna

funkcia h je bijektívna

monotónnosť (M.) – rýdzo a nerýdzo monotónne

rastúca funkcia – funkcia f je na intervale I_1 rastúca, ak na tom intervale k väčším x -ovým hodnotám patria väčšie funkčné hodnoty

$$I_1 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in I_1: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

klesajúca funkcia – funkcia f je na intervale I_2 klesajúca, ak na tom intervale k väčším x -ovým hodnotám patria menšie funkčné hodnoty

$$I_2 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_3, x_4 \in I_2: x_3 < x_4 \Rightarrow f(x_3) > f(x_4)$$

neklesajúca funkcia – $I_3 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_5, x_6 \in I_3: x_5 < x_6 \Rightarrow f(x_5) \leq f(x_6)$

nerastúca funkcia – $I_4 \subseteq D_f \Rightarrow \forall x_7, x_8 \in I_4: x_7 < x_8 \Rightarrow f(x_7) \geq f(x_8)$

nulové (osové) body (N.B.) – spoločné body grafu funkcie so súradnicovými osami (ak existujú)

bod ležiaci na x -ovej osi má y -ovú súradnicu 0: $X_1(x_1; 0)$

bod ležiaci na y -ovej osi má x -ovú súradnicu 0: $Y(0; y)$

P. Graf funkcie môže mať nekonečne veľa spoločných bodov s osou $x \leftrightarrow$ ale s osou y najviac jeden (potom by nebol grafom funkcie)

párnosť funkcie (Pá.) – väčšina funkcií nie je ani párna ani nepárna

párna funkcia – funkcia f je párna, ak opačným x -ovým hodnotám patria rovnaké funkčné hodnoty

$$\forall x \in D_f: f(x) = f(-x)$$

graf párnej funkcie je osovo súmerný podľa y -ovej osi

nepárna funkcia – funkcia f je nepárna, ak opačným x -ovým hodnotám patria opačné funkčné hodnoty

$$\forall x \in D_f: f(x) = -f(-x)$$

graf nepárnej funkcie je stredovo súmerný podľa začiatku súradnicovej sústavy

extrémy funkcie (Ext.) – lokálne $\leftrightarrow$ globálne

lokálne minimum – funkcia f má v bode x_1 lokálne minimum, ak funkcia na otvorenom intervale $(a_1; b_1)$ práve v x_1 nadobudne najmenšiu hodnotu

$$\exists (a_1; b_1) \subset D_f: x_1 \in (a_1; b_1) \wedge \forall x \in (a_1; b_1) \setminus \{x_1\} \Rightarrow f(x_1) < f(x)$$

lokálne maximum – funkcia f má v bode x_2 lokálne maximum, ak funkcia na otvorenom intervale $(a_2; b_2)$ práve v x_2 nadobudne najväčšiu hodnotu

$$\exists (a_2; b_2) \subset D_f: x_2 \in (a_2; b_2) \wedge \forall x \in (a_2; b_2) \setminus \{x_2\} \Rightarrow f(x) < f(x_2)$$

globálne minimum – funkcia f má v bode x_3 globálne minimum, ak funkcia na definičnom obore práve v x_3 nadobudne najmenšiu hodnotu

$$x_3 \in D_f \wedge \forall x \in D_f \setminus \{x_3\} \Rightarrow f(x_3) < f(x)$$

globálne maximum – funkcia f má v bode x_4 globálne maximum, ak funkcia na definičnom obore práve v x_4 nadobudne najväčšiu hodnotu

$$x_4 \in D_f \wedge \forall x \in D_f \setminus \{x_4\} \Rightarrow f(x) < f(x_4)$$

periodickosť (periodicita) funkcie (Pe.) – funkcia f je periodická, ak môžeme nájsť také kladné číslo p (perióda), že funkcia v bode x nadobudne rovnakú funkčnú hodnotu, ako o p ďalej.

$$\exists p > 0: \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(x + p)$$

P. Z definície periodickosti vyplýva, že periodická funkcia o celý násobok periódy ďalej takisto nadobudne tú istú funkčnú hodnotu: $\forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = f(x + k \cdot p)$.

Nepriama úmernosť (lineárna lomená funkcia)

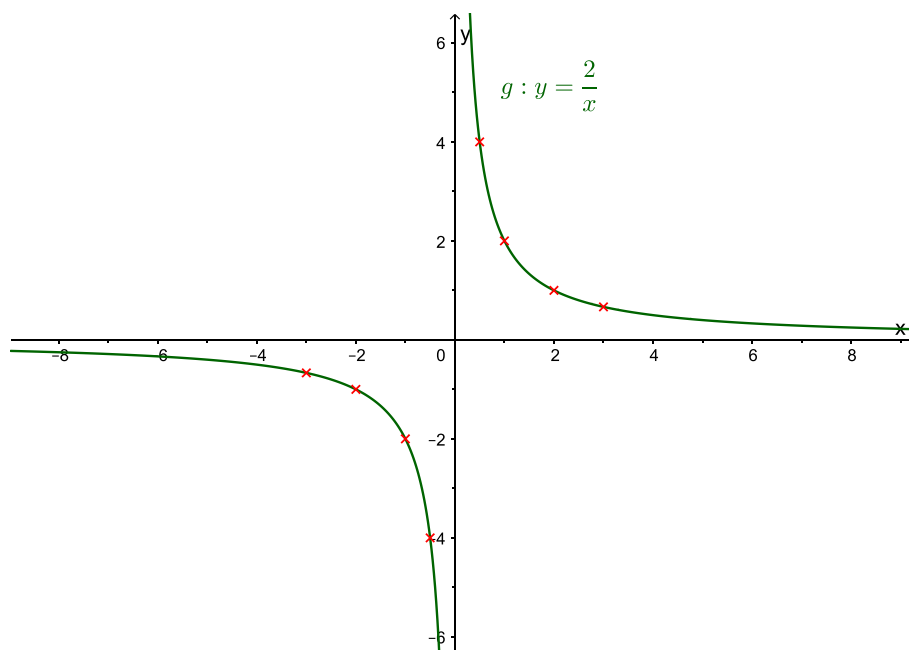
zo základnej školy – súčin dvoch hodnôt je konštantný: $x \cdot y = k$

$$f: y = \frac{k}{x}$$

$$k \in \mathbb{R}$$

pr. $g: y = \frac{2}{x}$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
y	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{2}{3}$



rozšírenie pojmu nepriamej úmernosti $\rightarrow$ lineárna lomená funkcia

$$f: y = \frac{a_1 x + a_0}{b_1 x + b_0} = \frac{a}{x + b} + c$$

$$a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$$

vplyv čísla a na graf

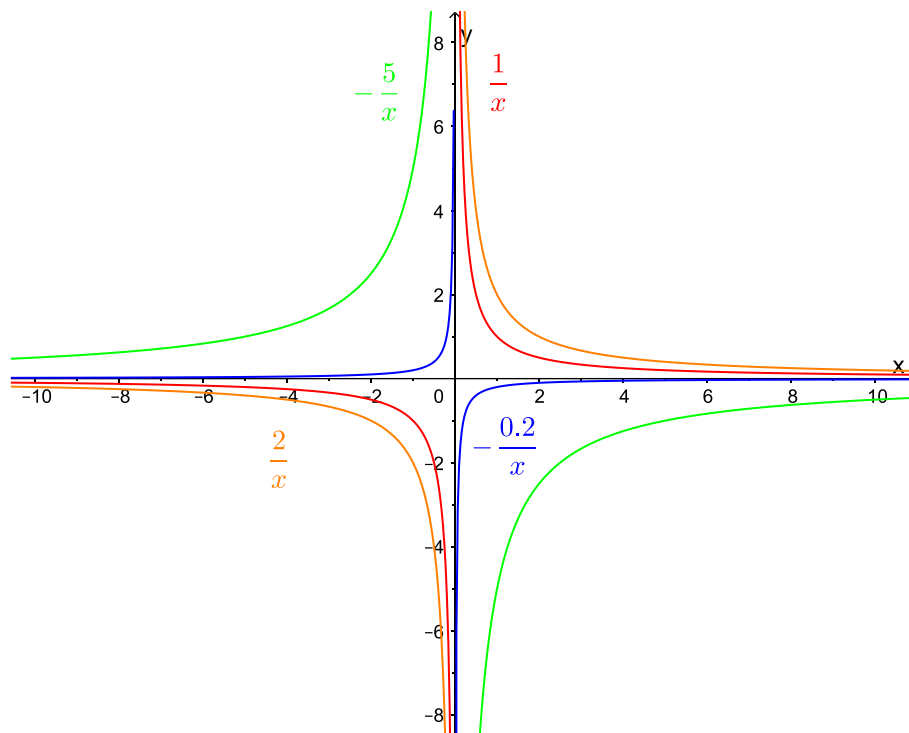
$$f: y = \frac{1}{x}$$

$$g: y = \frac{2}{x}$$

$$h: y = -\frac{5}{x}$$

$$i: y = -\frac{0.2}{x}$$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{x}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{2}{3}$
$-\frac{5}{x}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	5	10	-10	-5	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{3}$
$-\frac{0,2}{x}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{15}$



a má vplyv na tvar a monotónnosť

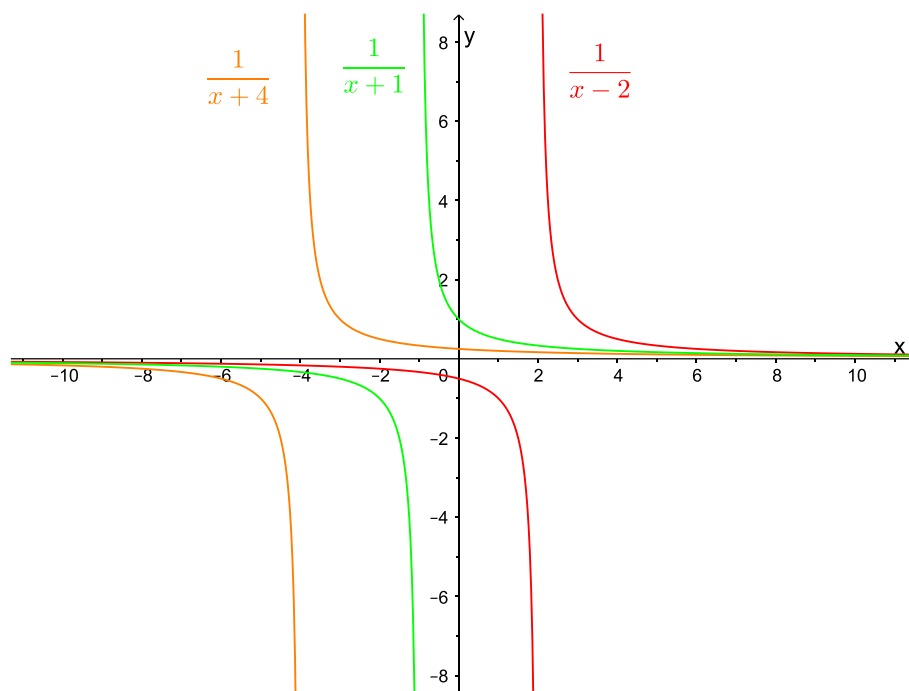
vplyv čísla ***b*** na graf

$$f: y = \frac{1}{x-2}$$

$$g: y = \frac{1}{x+4}$$

$$h: y = \frac{1}{x+1}$$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x-2}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{3}$	-1	—	1
$\frac{1}{x+4}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
$\frac{1}{x+1}$	$-\frac{1}{2}$	-1	—	2	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$

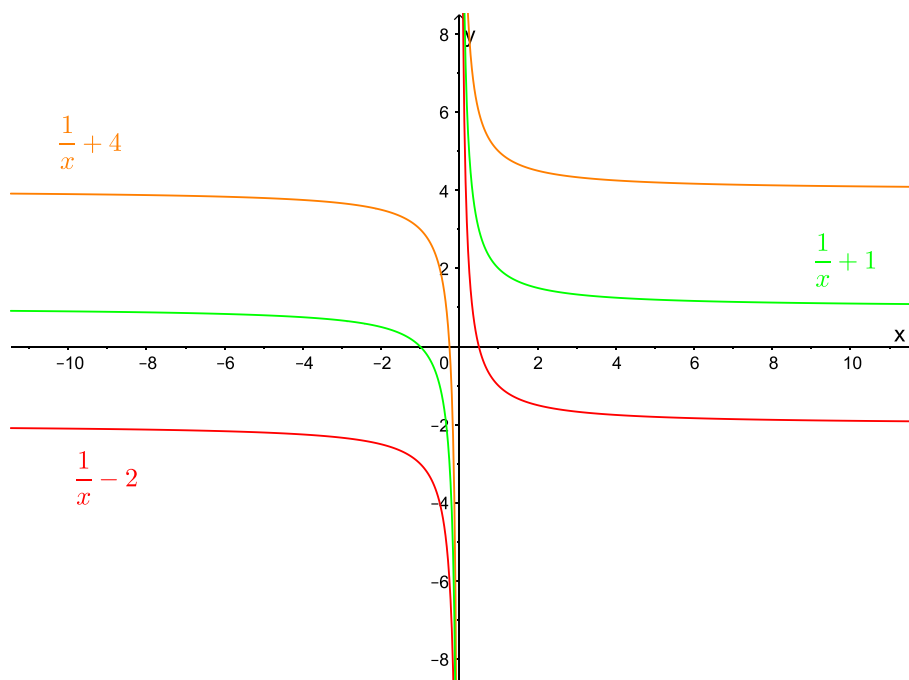


b má vplyv na **polohu** → posunie v smere x -ovej osi: do $-b$

vplyv čísla c na graf

$f: y = \frac{1}{x} - 2$ $g: y = \frac{1}{x} + 4$ $h: y = \frac{1}{x} + 1$

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$\frac{1}{x} - 2$	$-\frac{7}{3}$	$-\frac{5}{2}$	-3	-4	0	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{3}$
$\frac{1}{x} + 4$	$\frac{11}{3}$	$\frac{7}{2}$	3	2	6	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{13}{3}$
$\frac{1}{x} + 1$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$



c má vplyv na **polohu** → posunie v smere y -ovej osi: do c

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$

$H_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

G. hyperbola otočená o $+45^\circ$ so stredom v $(-b; c)$

M. pre $a > 0$ $x \in (-\infty; -b) \cup (-b; \infty)$ m.↓

pre $a < 0$ $x \in (-\infty; -b) \cup (-b; \infty)$ m.↑

N.B. $X\left(-\frac{a+bc}{c}; 0\right)$ – iba v prípade $c \neq 0$ existuje

$Y\left(0; \frac{a+bc}{b}\right)$ – iba v prípade $b \neq 0$ existuje

Ext. nemá