

Lineárne rovnice

D. Rovnica má dve strany (ľavá a pravá strana rovnice) a medzi nimi symbol „=“, pričom aspoň na jednej strane je výraz (čiže obsahuje aspoň jednu neznámu).

P. Nakoľko všetky rovnice preberané na SŠ obsahujú iba jednu premennú, naše rovnice budú iba s jednou neznámou.

číslo je riešením (koreňom) rovnice – po dosadení čísla namiesto neznámej do pôvodného tvaru rovnice dostaneme rovnaké hodnoty na oboch stranách (platí rovnosť)

riešiť rovnicu – nájsť všetky riešenia rovnice

množina riešení (obor pravdivosti rovnice) – súhrn všetkých riešení rovnice

ekvivalentná úprava rovnice – rovnica pred úpravou a po úprave má presne tie isté riešenia → ani nepribudne ani neubudne riešenie

ekvivalentné úpravy:

- k obojom stranám rovnice môžeme **pripočítať** to isté číslo alebo ten istý výraz → prenášanie členov z jednej strany na druhú

$$\begin{array}{rcl} 7x - 2 = 18 + 2x & & /+ 2 \\ 7x = 20 + 2x & & /- 2x \\ 5x = 20 & & \end{array}$$

- oboje strany rovnice môžeme **vynásobiť** tým istým **nenulovým** číslom alebo výrazom → odstránenie zlomkov a koeficientov

$$\begin{array}{rcl} \frac{7x-2}{2} = 9 + x & & /.2 \\ 7x - 2 = 18 + 2x & & \\ \dots & & \\ 5x = 20 & & /:5 \\ x = 4 & & \end{array}$$

P. Netreba zvlášť spomenúť „odčítať“ a „vydeliť“:

odčítanie nahradí pripočítanie opačného čísla alebo výrazu: $/- 2x \equiv /+ (-2x)$

delenie nahradí násobenie s prevrátenou hodnotou čísla alebo výrazu: $/:5 \equiv /.\frac{1}{5}$

P. Tieto ekvivalentné úpravy sú založené na vlastnostiach reálnych čísel.

Ešte pri rovniciach je dovolené vymeniť strany (ale je úplne jedno, či na konci výsledok bude na pravej strane a neznáma na ľavej, alebo naopak). Ale toto nie je ozajstná úprava.

skúška správnosti – výsledok/výsledky dosadíme do pôvodného tvaru rovnice → ak platí rovnosť, potom je riešením, ináč nie.

P. K úplnému riešeniu rovnice hocijakého typu patrí aj skúška.

triedenie rovníc:

podľa **počtu neznámych**: rovnica s jednou neznámou, s dvomi, tromi, ... neznámymi

podľa **riešiteľnosti**: všeobecne platná rovnica (vždy pravda), riešiteľná, neriešiteľná

podľa **funkcií**: algebrické, transcendentné (nealgebrické)

algebrické: lineárna (prvého stupňa), kvadratická (druhého stupňa), kubická (3. st.), kvartická (4. st.); diofantovské (na množine $\mathbb{Z}$)

transcendentné: rovnice s absolútnou hodnotou, exponenciálne, logaritmické, goniometrické, ...

Ak dostaneme nejakú rovnicu s jednou neznámou, ktorá obsahuje zátvorky, lomené výrazy a žiadne ďalšie funkcie, na prvý pohľad sa nedá určiť o akú rovnicu ide (podľa stupňa neznámej).

D. Rovnica je lineárna, ak ju môžeme upraviť na taký tvar (odstránením zlomkov, zátvoriek, prenášaním a zlúčením členov) aby na jednej strane bola lineárna funkcia a na druhej číslo 0.

$$a \cdot x + b = 0 \quad \text{alebo} \quad 0 = a \cdot x + b$$

Potom riešením rovnice bude: $x = -\frac{b}{a}$.

Je to presne bod, kde graf lineárnej funkcie prechádza x -ovou osou.

Ale ak rozšírime lineárne funkcie o konštantné (môžeme konštantnú funkciu považovať za špeciálny prípad lineárnej, kde $a = 0$), potom vieme, že ten graf bude rovnobežný s x -ovou osou, alebo môže byť aj samotná os x -ová.

Preto počet riešení lineárnej rovnice môže byť trojaký:

- a, lineárna rovnica má jedno riešenie – ide o klasickú lineárnu rovnicu (drvivá väčšina príkladov)
- b, lineárna rovnica nemá riešenie – na konci dostaneme **nepravdu** (rovnosť dvoch rôznych čísel)
- c, lineárna rovnica má nekonečne veľa riešení – na konci dostaneme **pravdu** (rovnosť rovnakých čísel)

P. Ak rovnica má nekonečne veľa riešení, potom riešením nemusia byť všetky reálne čísla (množina $\mathbb{R}$):

- ak na začiatku riešenia sme určili nejaké podmienky (rovnica obsahuje výraz/výrazy, ktoré nie je/sú definované na všetkých číslach [*lomený výraz, odmocninu, ...*] – tie budú vylúčené z množiny riešení
- ak rovnicu máme riešiť v nejakej špeciálnej množine čísel – potom riešením bude práve táto množina okrem výnimok podľa predchádzajúceho bodu a, (ak sú nejaké)

príklad:

Riešte lineárne rovnice:

a, $-7x - 3 = 0$

b, $\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = 4$

c, $3(2x + 1) - 2(1 - 3x) = 4(3x + 1) - 3$

d, $4(3x - 2) - 5x = 2(2x - 1) + 3(x - 5)$

e, $(x - 2)(x + 5) - (4 + x)(3 + x) = 10$

$$-7x - 3 = 0$$

$$/+3$$

$$-7x = 3$$

$$/:(-7)$$

$$x = -\frac{3}{7}$$

$$L: -7 \cdot \left(-\frac{3}{7}\right) - 3 = \frac{21}{7} - 3 = 3 - 3 = 0$$

$$P: 0$$

$$L = P$$

$$P = \left\{-\frac{3}{7}\right\}$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{5} = 4$$

$$/.15$$

$$10x + 6 = 60$$

$$/-6$$

$$10x = 54$$

$$/:10$$

$$x = 5,4 = \frac{27}{5}$$

$$L: \frac{2}{3} \cdot \frac{27}{5} + \frac{2}{5} = \frac{18}{5} + \frac{2}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

$$P: 4$$

$$L = P$$

$$P = \{5,4\}$$

$$3(2x + 1) - 2(1 - 3x) = 4(3x + 1) - 3$$

$$6x + 3 - 2 + 6x = 12x + 4 - 3$$

$$12x + 1 = 12x + 1$$

$$/-12x$$

$$1 = 1$$

je pravda

do skúšky si môžeme vybrať ľubovoľné číslo – napr. $x = 1$

$$L: 3(2 \cdot 1 + 1) - 2(1 - 3 \cdot 1) = 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) = 9 + 4 = 13$$

$$P: 4(3 \cdot 1 + 1) - 3 = 4 \cdot 4 - 3 = 16 - 3 = 13$$

$$L = P$$

$$P = \mathbb{R}$$

$$4(3x - 2) - 5x = 2(2x - 1) + 3(x - 5)$$

$$12x - 8 - 5x = 4x - 2 + 3x - 15$$

$$7x - 8 = 7x - 17$$

$$/-7x$$

$$-8 = -17$$

je nepravda

$$-8 \neq -17$$

nemá riešenie – $P = \emptyset$

$$(x - 2)(x + 5) - (4 + x)(3 + x) = 10$$
$$x^2 + 5x - 2x - 10 - (12 + 4x + 3x + x^2) = 10$$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 3x - 10 - (12 + 7x + x^2) &= 10 \\
 x^2 + 3x - 10 - 12 - 7x - x^2 &= 10 \\
 -4x - 22 &= 10 & /+22 \\
 -4x &= 32 & /:(-4) \\
 x &= -8
 \end{aligned}$$

$$L: (-8 - 2)(-8 + 5) - (4 + (-8))(3 + (-8)) = -10 \cdot (-3) - (-4) \cdot (-5) = 30 - 20 = 10$$

$$P: 10$$

$$L = P$$

$$P = \{-8\}$$

Lineárne rovnice môžu obsahovať aj **lomené výrazy**. Pri takýchto rovniciach platí to, čo aj pri lomených výrazoch. Pred ekvivalentnými úpravami takejto rovnice musíme skôr určiť podmienky, kedy má/majú daný výraz/dané výrazy zmysel. Tieto podmienky zvykneme raz podčiarknuť, aby sme neskôršie ľahšie našli k porovnaniu. Potom riešime samotnú rovnicu. Výsledok skôr porovnáme s podmienkou/podmienkami. Ak vyhovuje všetkým podmienkam, až potom môžeme skonštatovať, že výsledok je riešením rovnice. Takže môžeme podčiarknuť dvakrát.

príklad:

Riešte lineárne rovnice:

$$\begin{aligned}
 a, 3x + \frac{x^2-9}{x+3} &= -15 & b, \frac{2x}{x-3} &= 2 + \frac{6}{x-3} & c, \frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} &= \frac{x}{x^2-2x} \\
 d, \frac{2x-7}{2x^2-4x+2} - \frac{2}{x-1} &= \frac{1}{3-3x} - \frac{x+1}{x^2-2x+1} & e, \frac{3}{4x^2+20x+25} + \frac{4}{4x^2+4x+1} &= \frac{7}{4x^2+12x+5}
 \end{aligned}$$

$$x + 3 \neq 0$$

$$x \neq -3$$

$$\begin{aligned}
 3x + \frac{x^2-9}{x+3} &= -15 \\
 3x + \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} &= -15 \\
 3x + x - 3 &= -15 \\
 4x - 3 &= -15 & /+3 \\
 4x &= -12 & /:4 \\
 x &= -3
 \end{aligned}$$

porovnáme výsledok s podmienkou: práve táto hodnota nemôže byť riešením $\Rightarrow$ rovnica nemá riešenie

$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2x}{x-3} &= 2 + \frac{6}{x-3} & /.(x-3) \\
 2x &= 2 \cdot (x-3) + 6 \\
 2x &= 2x - 6 + 6 \\
 2x &= 2x & /-2x \\
 0 &= 0
 \end{aligned}$$

dostali sme pravdu $\Rightarrow$ rovnica má nekonečne veľa riešení: všetky reálne čísla okrem čísel vylúčených podmienkami

$$P = \mathbb{R} \setminus \{3\} + \text{skúška}$$

$$x^2 - 4 \neq 0$$

$$x^2 \neq 4$$

$$|x| \neq 2$$

$$x \neq -2 \text{ a } x \neq 2$$

$$x^2 + 2x \neq 0$$

$$x(x+2) \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{x^2-4} + \frac{x-4}{x^2+2x} &= \frac{x}{x^2-2x} \\
 \frac{2}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} &= \frac{x}{x(x-2)} & /.x(x-2)(x+2) \\
 2 \cdot x + (x-4) \cdot (x-2) &= x \cdot (x+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x + x^2 - 2x - 4x + 8 &= x^2 + 2x \\
 x^2 - 4x + 8 &= x^2 + 2x & /-x^2 + 4x \\
 8 &= 6x & /:6 \\
 \frac{8}{6} &= x
 \end{aligned}$$

$$P = \left\{ \frac{4}{3} \right\} + \text{skúška}$$

$$2x^2 - 4x + 2 \neq 0$$

$$2(x^2 - 2x + 1) \neq 0$$

$$2(x - 1)^2 \neq 0$$

$$(x - 1)^2 \neq 0$$

$$|x - 1| \neq 0$$

$$x - 1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$3 - 3x \neq 0$$

$$3(1 - x) \neq 0$$

žiadne ďalšie podmienky

$$\begin{aligned}
 \frac{2x-7}{2x^2-4x+2} - \frac{2}{x-1} &= \frac{1}{3-3x} - \frac{x+1}{x^2-2x+1} \\
 \frac{2x-7}{2x-7} - \frac{2}{x-1} &= \frac{1}{1} - \frac{x+1}{x+1} \\
 \frac{2(x-1)^2}{2x-7} - \frac{x-1}{x-1} &= \frac{3(1-x)}{1} - \frac{(x-1)^2}{x+1} \\
 \frac{2(x-1)^2}{2x-7} - \frac{2}{x-1} &= \frac{1}{-3(-1+x)} - \frac{x+1}{(x-1)^2} & / \cdot 6(x-1)^2 \\
 (2x-7) \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot (x-1) &= -2(x-1) - (x+1) \cdot 6 \\
 6x - 21 - 12x + 12 &= -2x + 2 - 6x - 6 \\
 -6x - 9 &= -8x - 4 & /+ 8x + 9 \\
 2x &= 5 & /:2 \\
 x &= 2,5
 \end{aligned}$$

$$P = \{2,5\} + \text{skúška}$$

$$4x^2 + 20x + 25 \neq 0$$

$$(2x + 5)^2 \neq 0$$

$$|2x + 5| \neq 0$$

$$2x + 5 \neq 0$$

$$x \neq -2,5$$

$$4x^2 + 4x + 1 \neq 0$$

$$(2x + 1)^2 \neq 0$$

$$|2x + 1| \neq 0$$

$$2x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -0,5$$

$$4x^2 + 12x + 5 \neq 0$$

$$(2x + 5)(2x + 1) \neq 0$$

z toho nedostaneme novú podmienku

$$\begin{aligned}
 \frac{3}{4x^2+20x+25} + \frac{4}{4x^2+4x+1} &= \frac{7}{4x^2+12x+5} \\
 \frac{3}{(2x+5)^2} + \frac{4}{(2x+1)^2} &= \frac{7}{(2x+5)(2x+1)} & / \cdot (2x+5)^2 \cdot (2x+1)^2 \\
 3 \cdot (2x+1)^2 + 4 \cdot (2x+5)^2 &= 7 \cdot (2x+5)(2x+1) \\
 3 \cdot (4x^2 + 4x + 1) + 4 \cdot (4x^2 + 20x + 25) &= 7 \cdot (4x^2 + 2x + 10x + 5) \\
 12x^2 + 12x + 3 + 16x^2 + 80x + 100 &= 28x^2 + 14x + 70 + 35 \\
 28x^2 + 92x + 103 &= 28x^2 + 84x + 35 & /-28x^2 - 84x - 103 \\
 8x &= -68 & /:8 \\
 x &= -8,5
 \end{aligned}$$

$$P = \{-8,5\} + \text{skúška}$$

Riešte lineárne rovnice v množine $\mathbb{R}$. Urobte vždy aj skúšku správnosti výpočtu.

a, $3x + \frac{1}{4} = 0$

b, $x - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

c, $-2x + 1 = x - 2$

d, $\frac{x}{2} + 2 = -\frac{3}{4}$

e, $\frac{2x}{11} + 3 = 0$

f, $\frac{-7}{2}x + 1 = 2x$

$$g, -\frac{35}{10} = \frac{2}{5}a$$

$$h, \frac{x}{4} - 3,6 = 0$$

$$i, 4s - 17 = -9$$

Dané rovnice riešte v intervale $\langle 1; 4 \rangle$. Riešenie zaokrúhlite na tri desatinné miesta a skúškou overte ich správnosť.

$$a, x + 2 - \frac{2x-0,8+0,6x}{15} - 1,4x = 0,1(3-x)$$

$$b, a - \frac{2-\frac{3a}{4}}{5} - 9 = \frac{6-\frac{a}{7}}{8}$$

$$c, x - \frac{1-1,5x}{4} = \frac{20-2,5x}{30} + 2$$

$$d, \frac{0,31+0,22u}{0,3} - 0,25 = 0,8 + 0,05u$$

Riešte lineárne rovnice v množine $\mathbb{R}$:

$$a, (6x+3) - (3x-4) = (x-4) - (x+1) \quad b, \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \left(-x - \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{3}x - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{6}$$

$$c, (x-3)(x-4) - (1-x)(2-x) = 0 \quad d, 2[3(4-x) - 2(3+2x) - 2] = 44$$

$$e, \frac{x-1}{2} + \frac{3x-1}{4} - \frac{5x-1}{6} = 2$$

$$f, x + \frac{x+1}{4} = 2x + \frac{5-3x}{2} - \frac{x-3}{8}$$

Dané rovnice riešte v množine $\mathbb{R}$:

$$a, \frac{3x-2}{x} = 4$$

$$b, \frac{x-1}{3x+2} + \frac{5}{2} = 2$$

$$c, \frac{a-1}{a+1} = 0$$

$$d, \frac{2x-4}{x+2} = 6$$

$$e, \frac{2x}{x+3} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f, -\frac{5}{7x} + 1 = \frac{11}{9}$$

Dané rovnice riešte v množine $\mathbb{R}$ a urobte skúšku:

$$a, \frac{x^2-11x+2}{x} = x - 15$$

$$b, \frac{x^2-3}{x-1} + 2 = x + 2$$

$$c, \frac{3y^2+y-11,2}{y+3,8} = y + 2(y+1)$$