

Exponenciálne rovnice

D. Rovnica je **exponenciálna**, ak neznámu obsahuje v mocniteli.

Exponenciálne funkcie sú prosté $\rightarrow$ každú funkčnú hodnotu (y-ovú) nadobudnú iba raz (buď je rastúca na celom definičnom obore, alebo je klesajúca). Práve toto využijeme pri riešení exponenciálnych rovníc.

V. $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$

Ak dokážeme upraviť rovnicu tak, aby ostali na obidvoch stranách mocniny s rovnakým základom, potom môžeme písať rovnosť mocniteľov – rovnica bude jednoduchšia, väčšinou už nie exponenciálna.

P. Samozrejme k úplnému riešeniu aj tohto typu rovníc (ku každému typu) patrí aj skúška správnosti.

Opakovanie

V. (vety pre počítanie s mocninami – 1. ročník)

a, $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

b, $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

c, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

d, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

e, $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

príklad:

Riešte rovnicu: $2^{5x-3} = 16$.

skúsime upraviť obidve strany na mocniny s rovnakým základom

$$2^{5x-3} = 2^4$$

teraz už môžeme písať rovnosť mocniteľov

$$5x - 3 = 4 \quad /+3$$

$$5x = 7 \quad /:5$$

$$x = \frac{7}{5}$$

Riešte rovnicu: $2^{x+1} \cdot 4^{2x-3} = 8^{-5}$.

všetky základy sú mocninami 2

$$2^{x+1} \cdot (2^2)^{2x-3} = (2^3)^{-5}$$

odstránime zátvorky a zlúčime na ľavej strane dve mocniny s rovnakým základom

$$2^{x+1} \cdot 2^{4x-6} = 2^{-15}$$

$$2^{5x-5} = 2^{-15}$$

máme rovnosť mocnín so spoločným základom $\Rightarrow$ stačí písať rovnosť mocniteľov

$$5x - 5 = -15 \quad /+5$$

$$5x = -10 \quad /:5$$

$$x = -2$$

Riešte rovnicu: $14^{x-1} = 19$.

číslo 19 sa nedá vyjadriť ako celú mocninu 14 $\rightarrow$ v takomto prípade jedine zlogaritmovanie oboch strán rovnice môže pomôcť

na kalkulačkách máme dekadický a prirodzený logaritmus (na niektorých novších typoch už si môžeme zvoliť aj základ logaritmu), tak použijeme jeden z tých dvoch

$$\log 14^{x-1} = \log 19$$

a teraz potrebujeme vety o logaritmoch pri úpravách

$$(x-1) \cdot \log 14 = \log 19 \quad /:\log 14$$

$$x-1 = \frac{\log 19}{\log 14} \quad /+1$$

$$x = \frac{\log 19}{\log 14} + 1$$

a to už kalkulačkou počítame

$$x = 2,1157$$

Riešte rovnicu v množine racionálnych čísel:

a, $3^x = 27$

b, $2^x = 8$

c, $3^{2x} = 27$

d, $2^{3x} = 8$

e, $3^{5x-3} = 81$

f, $2^{5x-3} = 16$

g, $3^{4x-5} = 729$

h, $2^{4x-5} = 64$

Riešte rovnicu v množine celých čísel:

a, $2^{x-2} = 5^{2-x}$

b, $3^{3x} = 27^{27}$

c, $8^{5-x} = 7^{x-5}$

d, $5^{x^2} = 5^{3x}$

e, $3^{x-4} = 2^{x-4}$

f, $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$

g, $4^{2x-3} = 7^{x-1,5}$

h, $7^{x-3} = 4^{2x-6}$

Riešte rovnicu v množine reálnych čísel:

a, $2^{x+3} - 2^x = 112$

b, $10^x + 10^{x-1} = 0,11$

c, $2^{x+2} + 2^{x-2} = 34$

d, $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 896$

Riešte rovnicu:

a, $5^2 \cdot 7^{x-1} = 8\,575$;

b, $3^{2x-1} = 2^{1-2x} \cdot 36$;

c, $8 \cdot 2^{2-x} = 16^{-3}$;

d, $9^{x-1} \cdot 3^{2x-1} = 27$;

e, $\frac{3^x}{2^x} = \frac{4}{9}$;

f, $2^x = 3^{x-1}$;

Riešte rovnicu:

a, $3^{1+x} - 3^{2+x} + 3^{3+x} = 0,1$;

b, $3^x \cdot 0,25^{-x} = 12^{x+1} - 110$!

Riešte rovnicu:

a, $12^x = 5,423$;

b, $36,5^x = 259$;

c, $3^{4x-1} = 5^{3x+5}$!