Logika

Logické spojky (operácie)

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \oplus B$
p	p	n	p	p	p	p	n
p	n	n	n	p	n	n	p
n	p	p	n	p	p	n	p
n	n	p	n	n	p	p	n

Poradie (priorita) logických operácií

$\neg \succ \wedge \succ \vee \succ \Rightarrow \succ \Leftrightarrow$

Logické zákony

1. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ — asociatívnosť
2. $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
3. $A \wedge B \equiv B \wedge A$ — komutatívnosť
4. $A \vee B \equiv B \vee A$
5. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ — distributívnosť
6. $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
7. $A \wedge A \equiv A$ — idempotencia
8. $A \vee A \equiv A$
9. $A \wedge (B \vee A) \equiv A$ — eliminácia
10. $A \vee (B \wedge A) \equiv A$
11. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ — *De Morgan*ove zákony
12. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
13. $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
14. $A \Rightarrow \neg A \equiv \neg A$ — negácia implikácie
15. $\neg A \Rightarrow A \equiv A$ — rozpor v implikácii
16. $\models \neg(A \Leftrightarrow \neg A)$
17. $A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$ — $\wedge \rightarrow \vee$
18. $A \vee B \equiv \neg(\neg A \wedge \neg B)$ — $\vee \rightarrow \wedge$
19. $A \Rightarrow B \equiv \neg(A \wedge \neg B)$ — $\Rightarrow \rightarrow \wedge$
20. $A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B$ — $\Rightarrow \rightarrow \vee$
21. $A \wedge B \equiv \neg(A \Rightarrow \neg B)$ — $\wedge \rightarrow \Rightarrow$
22. $A \vee B \equiv \neg A \Rightarrow B$ — $\vee \rightarrow \Rightarrow$
23. $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ — kontrapozícia
24. $\neg\neg A \equiv A$ — dvojnásobná negácia
25. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ — výmena predpony v implikácii
26. $A \wedge B \Rightarrow C \equiv A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ — implikácia s konjunktívnou predponou
27. $A \vee \top \equiv \top$
28. $A \vee \bot \equiv A$
29. $A \wedge \top \equiv A$
30. $A \wedge \bot \equiv \bot$
31. $A \Rightarrow \top \equiv \top$
32. $A \Rightarrow \bot \equiv \neg A$

33.	$\top \Rightarrow A \equiv A$	
34.	$\bot \Rightarrow A \equiv \top$	
35.	$\models A \Rightarrow A$	totožnosť
36.	$\models A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	rozšírenie o predponu
37.	$A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \equiv (A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	samodistributívnosť implikácie
38.	$A \vee B \Rightarrow C \equiv (A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$	implikácia s disjunktívnou predponou (analýza prípadu)
39.	$\models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$	tranzitívnosť (hypotetické sylogizmus)
40.	$\models (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A$	reductio ad absurdum
41.	$\models A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$	$\neg$ v predpone impl. z rozporu $\Rightarrow$ hocičo
42.	$\models A \vee \neg A$	zákon vylúčenia tretieho
43.	$\models \neg(A \wedge \neg A)$	zákon rozporu
44.	$\models ((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$	*Pierce*ov zákon
45.	$\forall x\, A \equiv A$	fiktívne kvantifikátory $\forall x \notin Fv(A)$
46.	$\exists x\, A \equiv A$	
47.	$\forall x\, \forall y\, A(x, y) \equiv \forall y\, \forall x\, A(x, y)$	výmena pozícií rovnakých kvantifikátorov
48.	$\exists x\, \exists y\, A(x, y) \equiv \exists y\, \exists x\, A(x, y)$	
49.	$\models \forall x\, A(x) \Rightarrow \exists x\, A(x)$	výmena kvantifikátorov v implikácii
50.	$\models \exists y\, \forall x\, A(x, y) \Rightarrow \forall x\, \exists y\, A(x, y)$	
51.	$\neg \exists x\, A(x) \equiv \forall x\, \neg A(x)$	*De Morgan*ove kvantifikované zákony
52.	$\neg \forall x\, A(x) \equiv \exists x\, \neg A(x)$	
53.	$\exists x\, A(x) \equiv \neg \forall x\, \neg A(x)$	$\exists \rightarrow \forall$
54.	$\forall x\, A(x) \equiv \neg \exists x\, \neg A(x)$	$\forall \rightarrow \exists$
55.	$A \wedge \forall x\, B(x) \equiv \forall x\, (A \wedge B(x))$	vyňatie kvantifikátorov
56.	$A \vee \forall x\, B(x) \equiv \forall x\, (A \vee B(x))$	$x \notin Fv(A)$
57.	$A \wedge \exists x\, B(x) \equiv \exists x\, (A \wedge B(x))$	
58.	$A \vee \exists x\, B(x) \equiv \exists x\, (A \vee B(x))$	
59.	$A \Rightarrow \forall x\, B(x) \equiv \forall x\, (A \Rightarrow B(x))$	
60.	$A \Rightarrow \exists x\, B(x) \equiv \exists x\, (A \Rightarrow B(x))$	
61.	$\forall x\, B(x) \Rightarrow A \equiv \exists x\, (B(x) \Rightarrow A)$	
62.	$\exists x\, B(x) \Rightarrow A \equiv \forall x\, (B(x) \Rightarrow A)$	
63.	$\forall x\, A(x) \wedge \forall x\, B(x) \equiv \forall x\, (A(x) \wedge B(x))$	obojstranné vyňatie kvantifikátorov
64.	$\exists x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \equiv \exists x\, (A(x) \vee B(x))$	
65.	$\models \exists x\, (A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow \exists x\, A(x) \wedge \exists x\, B(x)$	
66.	$\models \forall x\, A(x) \vee \forall x\, B(x) \Rightarrow \forall x\, (A(x) \vee B(x))$	
67.	ak $A \approx B \Rightarrow A \equiv B$	ekvivalencia kongruentných formúl
68.	$\models \forall x_1 \ldots x_k\, A \Rightarrow A(x_1 \ldots x_k \parallel t_1 \ldots t_k)$	kvantifikátory pri substitúcií
69.	$\models A(x_1 \ldots x_k \parallel t_1 \ldots t_k) \Rightarrow \exists x_1 \ldots x_k\, A$	
70.	$\forall x\, A \equiv \forall y\, (A(x \parallel y))$	zmena kompetencie kvantifikátora
71.	$\exists x\, A \equiv \exists y\, (A(x \parallel y))$	
72.	$\models \forall x\, \forall y\, A \Rightarrow \forall x\, (A(y \parallel x))$	redukcia kvantifikátorov
73.	$\models \exists x\, (A(y \parallel x)) \Rightarrow \exists x\, \exists y\, A$	x, y premenné rovnakého typu
74.	$A \equiv B \Rightarrow A(x_1 \ldots x_k \parallel t_1 \ldots t_k) \equiv B(x_1 \ldots x_k \parallel t_1 \ldots t_k)$	

Axiómy predikátového kalkulu (v Ω)

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
2. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$
3. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \wedge B)$

4. $A \wedge B \Rightarrow A$
5. $A \wedge B \Rightarrow B$
6. $(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$
7. $A \Rightarrow A \vee B$
8. $B \Rightarrow A \vee B$
9. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$
10. $\neg\neg A \Rightarrow A$
11. $\forall x\, A \Rightarrow A(x \parallel t)$
12. $\forall x\, (C \Rightarrow A(x)) \Rightarrow (C \Rightarrow \forall x\, A(x))$ $\quad x \notin Fv(C)$
13. $A(x \parallel t) \Rightarrow \exists x\, A$
14. $\forall x\, (A(x) \Rightarrow C) \Rightarrow (\exists x\, A(x) \Rightarrow C)$ $\quad x \notin Fv(C)$

Pravidlá dedukcie

$\dfrac{A, A \Rightarrow B}{B}$ modus ponens $\qquad \dfrac{A}{\forall x\, A}$

Štrukturálne pravidlá

$\Gamma, A \vdash A$	totožnosť
$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, B \vdash A}$	rozšírenie
$\dfrac{\Gamma, B, C, \Delta \vdash A}{\Gamma, C, B, \Delta \vdash A}$	permutácia
$\dfrac{\Gamma, B, B, \Delta \vdash A}{\Gamma, B, \Delta \vdash A}$	redukcia
$\dfrac{\Gamma \vdash A; \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}$	rezanie (cut-rule)

	dedukcia	odstránenie
$\Rightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma \vdash A; \Gamma \vdash A \Rightarrow B}{\Gamma \vdash B}$
$\wedge$	$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$	$\dfrac{\Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma, A \wedge B \vdash C}$
$\vee$	$\dfrac{\Gamma \vdash A / \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash C, \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \vee B \vdash C}$
$\neg$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Gamma, A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}$
$\forall$	$\dfrac{\Gamma \vdash A(y)}{\Gamma \vdash \forall y\, A(y)}$ $y \notin Fv(\Gamma)$	$\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, A}{\Gamma \vdash \forall A(x \parallel t)}$
$\exists$	$\dfrac{\Gamma \vdash A(x \parallel t)}{\Gamma \vdash \exists x\, A}$	$\dfrac{\Gamma, A(y) \vdash C}{\Gamma, \exists y\, A(y) \vdash C}$ $y \notin Fv(C, \Gamma)$
$\Leftrightarrow$	$\dfrac{\Gamma, A \vdash B, \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B}$	$\dfrac{\Gamma, A \Leftrightarrow B, (\Gamma \vdash A / \Gamma \vdash B)}{\Gamma \vdash B / \Gamma \vdash A}$

Teória množín

Operácie s množinami

rovnosť	$A = B :\!= (\forall a: a \in A \Rightarrow a \in B) \wedge (\forall b: b \in B \Rightarrow b \in A)$
prienik	$A \cap B :\!= \{\forall a \mid a \in A \wedge a \in B\}$
zjednotenie	$A \cup B :\!= \{\forall a \mid a \in A \vee a \in B\}$

podmnožina	$A \subseteq B \coloneqq \{\forall a \mid a \in A \Rightarrow a \in B\}$
vlastná podmnožina	$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$
rozdiel	$A \setminus B \coloneqq \{\forall a \mid a \in A \wedge a \notin B\} \wedge B \not\subset A$
symetrická diferencia	$A \,\Delta\, B = A \odot B \coloneqq (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
doplnková množina (komplement)	$\complement_A B \coloneqq \{\forall a \mid a \in A \wedge a \notin B\} \wedge B \subset A$
prázdna množina	$\forall a\colon a \notin \emptyset;\ \forall A\colon A \neq \emptyset \Rightarrow \emptyset \subset A$
univerzálna množina (základná)	$\forall A\colon A \subset U$
disjunktné množiny	$A \cap B = \emptyset$
Karteziánsky súčin	$A \times B \coloneqq \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$
mohutnosť (kardinalita)	$\mathrm{card}\,(A \cup B) = \lvert A \cup B\rvert = \lvert A\rvert + \lvert B\rvert - \lvert A \cap B\rvert$
	$\lvert\mathbb{N}\rvert = \lvert\mathbb{Z}\rvert = \lvert\mathbb{Q}\rvert = \aleph_0$
	$\lvert\mathbb{R}\rvert = \mathbf{c} = 2^{\aleph_0}$
potenčná množina	$\mathfrak{P}(A) \coloneqq \{H \mid H \subseteq A\}$

Vlastnosti

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

$\lvert\mathfrak{P}(A)\rvert = 2^{\lvert A\rvert}$

$A \cap A = A \cup A = A$

$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup \emptyset = A$
$A \cap U = A$	$A \cup U = U$
$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B)$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$	$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$
$(A \subseteq B) \Rightarrow ((A \cap C) \subseteq (B \cap C))$	$(A \subseteq B) \Rightarrow ((A \cup C) \subseteq (B \cup C))$
$((A \subseteq B) \wedge (A \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq (B \cap C))$	$((A \subseteq C) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow ((A \cup B) \subseteq C)$

$(A \setminus B) \subseteq A$	
$A \setminus A = \emptyset$	$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
$A \,\Delta\, B = B \,\Delta\, A$	
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$	$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$	$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$	$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$
$A \cap (B \,\Delta\, C) = (A \cap B) \,\Delta\, (A \cap C)$	
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \emptyset)$	$(A \cap B = \emptyset) \Leftrightarrow (A \setminus B = A)$

$A \cap \complement_E A = \emptyset$	$A \cup \complement_E A = E$
$\complement_E \emptyset = E$	$\complement_E E = \emptyset$
$\complement_E \complement_E A = A$	
$\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$	$\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$
$(A \subseteq B) \Leftrightarrow (\complement_E B \subseteq \complement_E A)$	

$(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$	$(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$	$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$

$(A \times B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$ $\quad$ $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Rightarrow ((A \times B) \subseteq (C \times D))$

Relácie

dvojčlenná (binárna) relácia	$R \coloneqq R \subseteq X \times Y$
súčin relácií	$R \circ S \coloneqq \{(x; y) \mid \exists z: z \in A \wedge (x; z) \in R \wedge (z; y) \in S\}$
inverzná relácia	$R^{-1} \coloneqq \{(x; y) \mid (y; x) \in R\}$
reflexívna	$\forall a: (a; a) \in R$ alebo $\forall a: aRa$
ireflexívna	$\forall a: (a; a) \notin R$ alebo $\forall a: \neg(aRa)$
tranzitívna	$\forall a; b; c: ((a; b) \in R \wedge (b; c) \in R) \Rightarrow (a; c) \in R$
symetrická	$\forall a; b: (a; b) \in R \Rightarrow (b; a) \in R$
antisymetrická	$\forall a; b: ((a; b) \in R \wedge (b; a) \in R) \Rightarrow (a = b)$
asymetrická	$\forall a; b: (a; b) \in R \Rightarrow (b; a) \notin R$
lineárna	$\forall a; b: (a; b) \in R \vee (b; a) \in R$
kontext	$\forall a; b: (a; b) \in R \vee (b; a) \in R \vee (a = b)$
zhoda s tretím	$\forall a; b; c: ((a; c) \in R \wedge (b; c) \in R) \Rightarrow (a; b) \in R$
trichotómia	$\forall a; b: ((a; b) \in R \vee (b; a) \in R \vee (a = b)) \wedge$ $\wedge \neg(((a; b) \in R \wedge (b; a) \in R) \wedge ((a; b) \in R \wedge (a = b)) \wedge$ $\wedge ((b; a) \in R \wedge (a = b))$
Relácia ekvivalencie	reflexívna, symetrická, tranzitívna
Relácia usporiadania	reflexívna, antisymetrická, tranzitívna, lineárna
Relácia dobrého usporiadania	usporiadanie + existuje najmenší prvok

Číselné množiny

Prirodzené čísla $\mathbb{N}$

Axiómy (*Peano*)

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. Ak $n \in \mathbb{N}$, potom $n + 1 \in \mathbb{N}$
3. $\nexists n \in \mathbb{N}$, pre ktoré $n + 1 = 1$
4. Nech $M \subseteq \mathbb{N}$, pre ktorú platí $1 \in M$; a z $n \in M$ vyplýva $n + 1 \in M$. Potom $M = \mathbb{N}$

$\forall a; b; c \in \mathbb{N}$

$\oplus$	
komutatívny	$a + b = b + a$
asociatívny	$(a + b) + c = a + (b + c)$
$\otimes$	
komutatívny	$a.b = b.a$
asociatívny	$(a.b).c = a.(b.c)$
(multiplikatívny) neutrálny prvok	$\exists 1: a.1 = a$
$(\oplus;\otimes)$	
distributívnosť $\otimes$ vzhľadom na $\oplus$	$(a + b).c = a.c + b.c$

card $(\mathbb{N}) = |\mathbb{N}| = \aleph_0$

Celé čísla $\mathbb{Z}$

$\forall a; b; c \in \mathbb{Z}$

$\oplus$	K; A
(aditívny) neutrálny prvok	$\exists 0: a + 0 = a$

aditívny inverzný prvok (opačné číslo) $\exists -a$: $a + (-a) = 0$

$\otimes$ K; A; N.P.

$(\oplus;\otimes)$ D

Racionálne čísla $\mathbb{Q}$

$\forall a; b; c \in \mathbb{Q}$

$\oplus$ K; A; N.P.; I.P.

$\otimes$ K; A; N.P.

multiplikatívny inverzný prvok (prevrátená hodnota)

$\exists \frac{1}{a}$: $a.\frac{1}{a} = 1$

$(\oplus;\otimes)$ D

rozšírenie $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$; $\forall c \neq 0$

súčet, rozdiel $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$

súčin $c.\frac{a}{b} = \frac{a}{b}.c = \frac{ca}{b}$

$\frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

podiel $c:\frac{a}{b} = c.\frac{b}{a} = \frac{cb}{a}$

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}.\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

desatinné číslo s nekonečným desatinným rozvojom s periódou

$r = \frac{p}{q} = \frac{r.10^d - r}{10^d - 1}$, kde d je dĺžka periódy

Iracionálne čísla $\mathbb{Q}'$

*Ludolf*ovo číslo	$\pi \doteq 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,46$
	„*περίμετρος” (perimetros,* čiže *obvod)*
	$\pi \approx \frac{22}{7} \approx \frac{355}{113}$
*Euler*ovo číslo *(Napier*ova konštanta*)*	$e \doteq 2{,}718\,281\,828\,459\,045\,235\,36$
*Euler*ova-*Mascheroni*ova konštanta	$\gamma \doteq 0{,}577\,215\,664\,901\,532\,860\,60$
	$\gamma := \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n\right) = \int_1^\infty \frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\,dx$
*Pytagor*ova konštanta	$\sqrt{2} \doteq 1{,}414\,213\,562\,373\,095\,048\,80$
*Theodor*ova konštanta	$\sqrt{3} \doteq 1{,}732\,050\,807\,568\,877\,293\,52$
pomer zlatého rezu	$\varphi \doteq 1{,}618\,033\,988\,749\,894\,848\,20$
*Embree*ova-*Trefethen*ova konštanta	$\beta^* \doteq 0{,}702\,58$
*Feigenbaum*ova konštanta	$\delta \doteq 4{,}669\,201\,609\,102\,990\,671\,85$
*Feigenbaum*ova konštanta	$\alpha \doteq 2{,}502\,907\,875\,095\,892\,822\,28$
konštanta prvočíselných dvojíc	$C_2 \doteq 0{,}660\,161\,815\,846\,869\,573\,92$
*Brun*ova konštanta prvočíselných dvojíc	$B_2 \doteq 1{,}902\,160\,582\,3$
*Brun*ova konštanta prvočíselných štvoríc	$B_4 \doteq 0{,}870\,588\,380\,0$
*Meissel*ova-*Mertens*ova konštanta	$M_1 \doteq 0{,}261\,497\,212\,847\,642\,783\,75$
*Erdős*ova-*Borwein*ova konštanta	$E_B \doteq 1{,}606\,695\,152\,415\,291\,763$

Reálne čísla $\mathbb{R}$

$\forall a; b; c; d \in \mathbb{R}$

V. $a.b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
$a = b \Rightarrow a + c = b + c$
$\forall c \neq 0$: $a = b \Rightarrow a.c = b.c$
$a = b \wedge c = d \Rightarrow a + c = b + d$

V. $a.b > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$
$a.b < 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$
$a > b \Rightarrow a + c > b + c$
$\forall c > 0$: $a > b \Rightarrow a.c > b.c$
$\forall c < 0$: $a > b \Rightarrow a.c < b.c$
$a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$
$a^2 \geq 0 \wedge a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

Komplexné čísla $\mathbb{C}$

$i^2 = -1$ — $i = \sqrt{-1}$

$a; a_1; a_2; b; b_1; b_2 \in \mathbb{R}$

$z = a + b.i$ — algebrický (aritmetický) tvar

$\mathrm{Re}\,(z) = \Re\,(z) = a$ — reálna časť

$\mathrm{Im}\,(z) = \Im\,(z) = b.i$ — imaginárna časť

$\bar{z} = a - b.i$ — komplexne združené číslo

$z + \bar{z} = 2a \in \mathbb{R}$ — $z.\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$

$z_1 = a_1 + b_1.i$ — $z_2 = a_2 + b_2.i$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2).i$

$z_1.z_2 = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + (a_1.b_2 + b_1.a_2).i$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1.a_2+b_1.b_2}{a_2^2+b_2^2} + \frac{b_1.a_2-a_1.b_2}{a_2^2+b_2^2}.i$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z.\bar{z}}$ — absolútna hodnota

$\cos\varphi = \frac{a}{|z|}$; $\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$ — argument φ

$z = |z|.(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ — goniometrický tvar

$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$z^n = |z|^n.(\cos n.\varphi + i.\sin n.\varphi)$ — *Moivr*ov vzorec

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i.\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|\,z\,|}.\left(\cos\frac{\varphi+k.360°}{n} + i.\sin\frac{\varphi+k.360°}{n}\right)$

$k = 0; 1; 2; \ldots; n - 1$

$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = \cos\frac{k.360°}{n} + i.\sin\frac{k.360°}{n}$ — komplexná jednotka

$z = |z|.e^{i.\varphi}$ — exponenciálny tvar

$z_1.z_2 = |z_1|.|z_2|.e^{i.(\varphi_1+\varphi_2)}$

$z^n = |z|^n.e^{i.n.\varphi}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}.e^{i.(\varphi_1-\varphi_2)}$

$\varepsilon_k = \sqrt[n]{1} = e^{i.\frac{k.360°}{n}}$ — $k = 0; 1; 2; \ldots; n - 1$

Deliteľnosť

$k, n \in \mathbb{N}$

$k/n \Leftrightarrow \exists q$: $q \in \mathbb{N} \wedge n = k.q$ — číslo k je deliteľom čísla n

$\mathrm{fac}\,[n] = \left\{k : k/n \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$ — množina deliteľov čísla n

$(a, b) = \max\{\mathrm{fac}[a] \cap \mathrm{fac}[b]\}$	najväčší spoločný deliteľ
$\mathrm{fac}^{-1}[n] = \left\{k : {}^{n}/_{k} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$	množina násobkov čísla *n*
$[a, b] = \min\{\mathrm{fac}^{-1}[a] \cap \mathrm{fac}^{-1}[b]\}$	najmenší spoločný násobok
$(a, b).[a, b] = a.b$	
$(a, b) = 1$	nesúdeliteľné čísla
$\mathrm{fac}\,[p] = \{1; p\}$	prvočíslo *p* má presne dva pozitívne delitele
$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$	prvočíselný rozklad čísla *n*, $p_1, p_2, \ldots, p_m$ – sú prvočísla

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ a $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, potom

$$(a, b) = \prod_{i=1}^{\max\{m,n\}} p_i^{\min\{\alpha_i,\beta_i\}} \qquad [a, b] = \prod_{i=1}^{\max\{m,n\}} p_i^{\max\{\alpha_i,\beta_i\}}$$

$d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_m + 1)$	počet deliteľov čísla *n*
$\varphi(n) = \lvert\{k \in \mathbb{N} \mid (n, k) = 1 \wedge k < n\}\rvert$	*Euler*ova funkcia φ – počet nesúdeliteľných čísel po *n*
$\sigma(n) = \sum_{k=1}^{n} {}^{k}/_{n}$	súčet vlastných deliteľov čísla *n*: σ(4) = 1 + 2 + 4 = 7

Euklidov algoritmus

$(a, b) = \mathbf{r_{n+1}}$

$$\begin{aligned} a &= b.q_0 + r_0 \\ b &= r_0.q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1.q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2.q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_n &= \mathbf{r_{n+1}}.q_{n+2} + 0 \end{aligned}$$

(12 600, 58 212) = 252

$$\begin{aligned} 58\,212 &= 12\,600.4 + 7\,812 \\ 12\,600 &= 7\,812.1 + 4\,788 \\ 7\,812 &= 4\,788.1 + 3\,024 \\ 4\,788 &= 3\,024.1 + 1\,764 \\ 3\,024 &= 1\,764.1 + 1\,260 \\ 1\,764 &= 1\,260.1 + 504 \\ 1\,260 &= 504.2 + 252 \\ 504 &= \mathbf{252}.2 + 0 \end{aligned}$$

Dokonalé číslo

$n = \sigma(n) - n = \frac{\sigma(n)}{2}$	rovná sa súčtu svojich vlastných menších deliteľov
$n = 2^{k-1}.(2^k - 1)$	*Euklides*: ak $2^k - 1$ je prvočíslo, potom *n* je dokonalé

k	2	3	5	7	13	17
n	6	28	496	8 128	33 550 336	8 589 869 056

$n < \frac{\sigma(n)}{2}$	abundantné číslo: {12; 18; 20; 24; 30; … }
$n > \frac{\sigma(n)}{2}$	redundantné číslo: {1; 2; 3; 4; 5; 7; … }
$n = p_1.p_2.p_3$	sfenické číslo: {30; 42; 66; 70; … }
$F_n = 2^{(2^n)} + 1$	*Fermat*ove číslo: {3; 5; 17; 257; … }

$666 = \text{DCLXVI} = \sum_{i=1}^{36} i$

12 – tucet; 13 – čertov tucet; 60 – kopa

Kongruencia

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: a = k.m + b$

$a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$

$a \equiv b \pmod{m} \wedge c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a.c \equiv b.d \pmod{m}$

Rímske číslice

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

XI	XII	L	C	D	M	ↀ	ↁ	ↂ	
11	12	50	100	500	1 000	1 000	5 000	10 000	

Arabské číslice

٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Číselné sústavy

pozičné ↔ nepozičné číselné sústavy

z ($z > 1$, $z \in \mathbb{N}$) základ číselnej sústavy – počet číslic

$0; 1; \dots ; (z - 1)$ číslice

$a = \underbrace{p_n p_{n-1} \dots p_0}_{n+1 \text{ číslic pred}} , \underbrace{p_{-1} p_{-2} \dots p_{-m}}_{m \text{ číslic za}}$

$$a = \sum_{i=-m}^{n} p_i . z^i$$

Desiatková (dekadická) sústava

$z = 10$ $0; 1; 2; \dots ; 9$

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
tisícky	stovky	desiatky	jednotky	desatiny	stotiny	tisíciny

Dvojková (binárna) sústava

$z = 2$ $0; 1$

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
tridsaťdvojky	šestnástky	osmičky	štvorky	dvojky	jednotky

$a = (1101001)_2 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = 64 + 32 + 8 + 1 = 105$

metóda delenia základom

$a = (\boldsymbol{r_n\, r_{n-1}\, r_{n-2} \dots r_1\, r_0})_z$

$$\begin{aligned}
a &= z.q_0 + \boldsymbol{r_0} \\
q_0 &= z.q_1 + \boldsymbol{r_1} \\
q_1 &= z.q_2 + \boldsymbol{r_2} \\
&\vdots \\
q_{n-1} &= z.0 + \boldsymbol{r_n}
\end{aligned}$$

číslo/podiel	: základ	podiel	zvyšok
175	:2 =	87	1
87	:2 =	43	1
43	:2 =	21	1
21	:2 =	10	1
10	:2 =	5	0
5	:2 =	2	1
2	:2 =	1	0
1	:2 =	0	1

$175 = (10101111)_2$

číslo/podiel	: základ	podiel	zvyšok
175	:3 =	58	1
58	:3 =	19	1
19	:3 =	6	1
6	:3 =	2	0
2	:3 =	0	2

$175 = (20111)_3$

metóda násobenia základom

$a = (\boldsymbol{q_n\, q_{n-1}\, q_{n-2} \ldots q_1\, q_0})_{\mathbf{z}}$

$a < z^{n+1} \wedge a > z^n$

$$
\begin{aligned}
a &= \boldsymbol{q_n}.z^n + r_n \\
r_n &= \boldsymbol{q_{n-1}}.z^{n-1} + r_{n-1} \\
r_{n-1} &= \boldsymbol{q_{n-2}}.z^{n-2} + r_{n-2} \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
r_1 &= \boldsymbol{q_0}.z^0 + 0
\end{aligned}
$$

číslo/rozdiel	mocnina	podiel	zvyšok
175	128	1	175-1.128 = 47
47	64	0	47-0.64 = 47
47	32	1	47-1.32 = 15
15	16	0	15-0.16 = 15
15	8	1	15-1.8 = 7
7	4	1	7-1.4 = 3
3	2	1	3-1.2 = 1
1	1	1	1-1.1 = 0

číslo/rozdiel	mocnina	podiel	zvyšok
175	81	2	175-2.81 = 13
13	27	0	13-0.27 = 13
13	9	1	13-1.9 = 4
4	3	1	4-1.3 = 1
1	1	1	1-1.1 = 0

Aproximácia čísel

a	presná hodnota
$a \approx \bar{a}$	stredná aproximácia čísla
$a - \bar{a}$	chyba aproximácie
$\lvert a - \bar{a} \rvert$	absolútna chyba aproximácie
$\Delta a \geq \lvert a - \bar{a} \rvert$	odhad absolútnej chyby

$\frac{|a-\bar{a}|}{a}$ relatívna chyba aproximácie

$\delta a = \frac{\Delta a}{a}$ odhad relatívnej chyby

$\Delta(a \pm b) \leq \Delta a + \Delta b$

$\Delta(a\ .\ b) \leq \Delta a + \Delta b$

$\Delta(a : b) \leq \Delta a + \Delta b$

$\Delta(a^n) \leq n.a^{n-1}.\Delta a$

$\Delta f(x) \leq |f'(x)|.\Delta x$

Algebra

Výrazy

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

$(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) = (a + b)(a - b)(a^2 + b^2)$

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

$a^{\mathrm{n}} - b^{\mathrm{n}} = (a - b)(a^{\mathrm{n-1}} + a^{\mathrm{n-2}}.b + a^{\mathrm{n-3}}.b^2 + \ldots + a^2.b^{\mathrm{n-3}} + a.b^{\mathrm{n-2}} + b^{\mathrm{n-1}})$

$a^{\mathrm{n}} + b^{\mathrm{n}} = (a + b)(a^{\mathrm{n-1}} - a^{\mathrm{n-2}}.b + a^{\mathrm{n-3}}.b^2 - \ldots + a^2.b^{\mathrm{n-3}} - a.b^{\mathrm{n-2}} + b^{\mathrm{n-1}})$, ak n je nepárne

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3ab^2 + 3ac^2 + 3bc^2 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 6abc$

$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$

*Newon*ova binomická veta

$$(a \pm b)^{\mathrm{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}.b^k =$$

$$= \binom{n}{0}a^{\mathrm{n}} \pm \binom{n}{1}a^{\mathrm{n-1}}.b + \binom{n}{2}a^{\mathrm{n-2}}.b^2 \pm \binom{n}{3}a^{\mathrm{n-3}}.b^3 + \ldots \pm \binom{n}{k}a^{\mathrm{n-k}}.b^{\mathrm{k}} + \ldots \pm \binom{n}{n-1}a.b^{\mathrm{n-1}} \mp \binom{n}{n}b^{\mathrm{n}}$$

_Pascal_ov trojuholník

$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6$	1 6 15 20 15 6 1
$(a + b)^7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$(a + b)^8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
$(a + b)^9$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
$(a + b)^{10}$	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Polynomická veta

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\mathrm{r}})^{\mathrm{n}} = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n}^{n} \binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_r}.a_1^{k_1}.a_2^{k_2}.\ldots.a_r^{k_r} =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_r=n}^{n} \frac{n!}{k_1!.k_2!.\dots.k_r!}.a_1^{k_1}.a_2^{k_2}.\dots.a_r^{k_r}$$

Mocniny

$a^n \coloneqq \underbrace{a.a.\dots.a}_{n\text{ činiteľov}}$ pre $n > 0$

$a^0 \coloneqq 1$

$a^n \coloneqq \frac{1}{a^{-n}}$ pre $n < 0$

$(a.b)^n = a^n.b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$a^n.a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$(a^n)^m = a^{n.m}$

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$ $a^x = b^x \Leftrightarrow (a = b \vee a = -b)$

Odmocniny

$\sqrt[n]{a} \coloneqq b \Leftrightarrow b^n = a$ $a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}$

$\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n.m]{a}$

$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[n.c]{a^{k.c}}$

Logaritmus

$\log_a b \coloneqq x \Leftrightarrow a^x = b \Rightarrow a = \sqrt[x]{b}$

$\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$ $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

$\log_a x^n = n.\log_a x$ $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{\log_a x}{n}$

$a^{\log_a x} = x$ $\log_a a^x = x$

$\log_a 1 = 0$ $\log_a a = 1$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

$\log x = \lg x = \log_{10} x$ dekadický alebo *Briggs*ov logaritmus

$\ln x = \log_e x$ prirodzený alebo *Napier*ov logaritmus

Rovnice

Lineárna rovnica

$a.x + b = 0$ $a; b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

$x = -\frac{b}{a}$

Kvadratická rovnica

$a.x^2 + b.x + c = 0$ $a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

$D = b^2 - 4.a.c$ diskriminant

$D > 0$ dva reálne korene

$D = 0$ jeden dvojnásobný reálny koreň

$D < 0$ nemá reálne korene → dva komplexné korene

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$a.x^2 + b.x + c = a.(x - x_1).(x - x_2)$ rozloženie na súčin lineárnych činiteľov

*Vièt*ove formuly: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}$

Rovnica tretieho stupňa (kubická)

$a.x^3 + b.x^2 + c.x + d = 0$ $a; b; c; d \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

$x^3 + r.x^2 + s.x + t = 0$ delené s a

$y = x + \frac{r}{3}$ substitúciou prejde na tvar $\left(x = y - \frac{r}{3}\right)$

$y^3 + p.y + q = 0$ $p = \frac{3s-r^2}{3}$, $q = \frac{2r^3}{27} - \frac{rs}{3} + t = \frac{2r^3-9rs+27t}{27}$

$p = \frac{3ac-b^2}{3a^2}$, $q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$

$D = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$

- $D > 0$ jeden reálny a dva komplexné korene
- $D = 0$ tri reálne → z toho jeden dvojnásobný koreň
- $D < 0$ tri reálne korene

*Cardan*ove vzorce

$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}}$ $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}}$

$y_1 = u + v$

$y_2 = -\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2}.i.\sqrt{3} = \varepsilon_1.u + \varepsilon_2.v$ kde $\varepsilon_{1,2} = \frac{-1 \pm i.\sqrt{3}}{2}$

$y_3 = -\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2}.i.\sqrt{3} = \varepsilon_2.u + \varepsilon_1.v$ naspäť dosadíme

$x_i = y_i - \frac{r}{3}$

*Vièt*ove formuly: $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$; $x_1.x_2.x_3 = -\frac{d}{a}$; $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -\frac{c}{d}$

Všeobecná rovnica n-tého stupňa

$P^n(x) \equiv a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + a_{n-2}.x^{n-2} + \ldots + a_1.x + a_0 = 0$

$a_n(x - x_1)^{k_1}.(x - x_2)^{k_2}.\ldots.(x - x_m)^{k_m} = 0$ $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$

*Vièt*ove formuly: $\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$; $\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n} x_i.x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$; $\sum_{\substack{i,j,k=1\\i<j<k}}^{n} x_i.x_j.x_k = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$; …; $\prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$

Špeciálne rovnice

Rýdzokvadratická

$x^2 + c = 0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c}$, ak $c \leq 0$

Neúplná kvadratická

$x^2 + b.x = 0$ $x_1 = 0$; $x_2 = -b$

Čistá tretieho stupňa

$x^3 + d = 0$ $x_1 = \sqrt[3]{-d}$

Neúplná tretieho stupňa

$x^3 + c.x = 0$ $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{-c}$, ak $c \leq 0$

Binomická rovnica 2n-tého stupňa (párna mocnina)

$x^{2n} - a = 0$ $x_{1,2} = \pm\sqrt[2n]{a}$, ak $a \geq 0$

Binomická rovnica (2n + 1)-ého stupňa (nepárna mocnina)

$x^{2n+1} - a = 0$ $x_1 = \sqrt[2n+1]{a}$

Sústavy rovníc

Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

$a_1.x + b_1.y = c_1$

$a_2.x + b_2.y = c_2$

$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ $\qquad$ $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

Sústava troch lineárnych rovníc s tromi neznámymi

$a_1.x + b_1.y + c_1.z = d_1$

$a_2.x + b_2.y + c_2.z = d_2$

$a_3.x + b_3.y + c_3.z = d_3$

$$x = \frac{b_2c_3d_1 + b_1c_2d_3 + b_3c_1d_2 - b_2c_1d_3 - b_3c_2d_1 - b_1c_3d_2}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

$$y = \frac{a_1c_3d_2 + a_3c_2d_1 + a_2c_1d_3 - a_3c_1d_2 - a_1c_2d_3 - a_2c_3d_1}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

$$z = \frac{a_1b_2d_3 + a_3b_1d_2 + a_2b_3d_1 - a_3b_2d_1 - a_1b_3d_2 - a_2b_1d_3}{a_1b_2c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3}$$

Priemery

$\bar{x}_{\mathrm{A}} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$ $\qquad$ aritmetický priemer

$\bar{x}_{\mathrm{G}} = \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.\ldots.a_n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ $\qquad$ geometrický priemer

$\bar{x}_{\mathrm{H}} = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}}$ $\qquad$ harmonický priemer

$\bar{x}_{\mathrm{Q}} = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ $\qquad$ kvadratický priemer

$\bar{x}_{\mathrm{H}} \le \bar{x}_{\mathrm{G}} \le \bar{x}_{\mathrm{A}} \le \bar{x}_{\mathrm{Q}}$

Známe nerovnice

1. $a^2 \ge 0$ $\qquad$ $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $\sqrt{a_1.a_2} \le \frac{a_1 + a_2}{2}$ $\qquad$ $\forall a_1;\ a_2 \in \mathbb{R}_0^+$

   $\sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.\ldots.a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n}$ $\qquad$ $\forall a_1;\ a_2;\ldots;\ a_n \in \mathbb{R}_0^+$
3. $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1.a_2.a_3.\ldots.a_n}$ $\qquad$ $\forall a_1;\ a_2;\ldots;\ a_n \in \mathbb{R}^+$
4. $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} \le \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$ $\qquad$ $\forall a_1;\ a_2;\ldots;\ a_n \in \mathbb{R}^+$
5. $(a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ldots + a_n.b_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$

   $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n} a_i^2 . \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ $\qquad$ *Cauchy-Buňakovskij-Schwarz*
6. $a \le |a|$

   $|a + b| \le |a| + |b|$ $\qquad$ $|a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n|$

   $||a| - |b|| \le |a - b| \le |a| + |b|$
7. $(1 + a)^n \ge 1 + n.a$ $\qquad$ $\forall a \in \mathbb{R}: a > -1$ $\quad$ *Bernoulli*

Elementárne funkcie

Algebrické funkcie

Konštantná funkcia

$f: y = c$ $c \in \mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \{c\}$

N.B. Y (0; c)

Lineárna funkcia

$f: y = a.x + b$ $a; b \in \mathbb{R} \land a \neq 0$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \mathbb{R}$

pre $a > 0$ m.↑ pre $a < 0$ m.↓

N.B. $X\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$ Y (0; b)

EXT. nemá

Kvadratická funkcia

$f: y = a.x^2 + b.x + c$ $a; b; c \in \mathbb{R} \land a \neq 0$

$f: y = a.(x + b')^2 + c' = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$

$V\left(\frac{-b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \begin{cases} \left\langle \frac{4ac-b^2}{4a}; \infty\right) & ak\ a > 0 \\ \left(-\infty; \frac{4ac-b^2}{4a}\right\rangle & ak\ a < 0 \end{cases}$

pre a > 0 $\begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right) & m.\downarrow \\ x \in \left(\frac{-b}{2a}; \infty\right) & m.\uparrow \end{cases}$ pre a < 0 $\begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{-b}{2a}\right) & m.\uparrow \\ x \in \left(\frac{-b}{2a}; \infty\right) & m.\downarrow \end{cases}$

N.B. $X_1\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; 0\right)$ $X_2\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}; 0\right)$

Y(0; c)

pre $a > 0$ v bode $x_0 = \frac{-b}{2a}$ má minimum

pre $a < 0$ v bode $x_0 = \frac{-b}{2a}$ má maximum

Funkcia absolútna hodnota

$f: y = a.|x + b| + c$ $a; b; c \in \mathbb{R} \land a \neq 0$

$V(-b; c)$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \begin{cases} \langle c; \infty) & ak\ a > 0 \\ (-\infty; c\rangle & ak\ a < 0 \end{cases}$

pre a > 0 $\begin{cases} x \in (-\infty; -b) & m.\downarrow \\ x \in (-b; \infty) & m.\uparrow \end{cases}$ pre a < 0 $\begin{cases} x \in (-\infty; -b) & m.\uparrow \\ x \in (-b; \infty) & m.\downarrow \end{cases}$

N.B. $X_1\left(\frac{-ba-c}{a}; 0\right)$ $X_2\left(\frac{-ba+c}{a}; 0\right)$

Y(0; $a.|b| + c$)

pre $a > 0$ v bode $x_0 = -b$ má minimum

pre $a < 0$ v bode $x_0 = -b$ má maximum

Nepriama úmernosť (lineárna lomená funkcia)

$f\colon y = \frac{a}{x+b} + c = \frac{a_1x+a_0}{b_1x+b_0}$ $a; b; c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-b\}$ $H_f = \mathbb{R} \setminus \{c\}$

pre $a > 0$ $x \in (-\infty; -b) \cup (-b; \infty)$ m.↓ pre $a < 0$ $x \in (-\infty; -b) \cup (-b; \infty)$ m.↑

N.B. $X\left(-\frac{a+bc}{c}; 0\right)$ $Y\left(0; \frac{a+bc}{b}\right)$

EXT. nemá

Racionálna lomená funkcia

$f\colon y = \frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\dots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\dots+b_1x+b_0}$ $\forall i\colon a_i; b_i \in \mathbb{R}$

Mocninová funkcia

$f\colon y = x^n$ $n \in \mathbb{Z}$

kladný párny $n > 0 \wedge n = 2.k$ $k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \mathbb{R}_0^+ = \langle 0; \infty)$

$x \in (-\infty; 0)$ m.↓ $x \in (0; \infty)$ m.↑

N.B. XY (0; 0) S.B. (–1; 1); (0; 0); (1; 1)

v bode $x_0 = 0$ globálne minimum párna funkcia: $x^n = (-x)^n$

kladný nepárny $n > 0 \wedge n = 2.k + 1$ $k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \mathbb{R}$

$x \in D_f$ m.↑

N.B. XY (0; 0) S.B. (–1; –1); (0; 0); (1; 1)

EXT. nemá nepárna funkcia: $(-x)^n = -x^n$

záporný párny $n < 0 \wedge n = 2.k$ $k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $H_f = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$

$x \in (-\infty; 0)$ m.↑ $x \in (0; \infty)$ m.↓

N.B. nemá S.B. (–1; 1); (1; 1)

EXT. nemá párna funkcia: $x^n = (-x)^n$

záporný nepárny $n < 0 \wedge n = 2.k + 1$ $k \in \mathbb{Z}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ m.↓

N.B. nemá S.B. (–1; –1); (1; 1)

EXT. nemá nepárna funkcia: $(-x)^n = -x^n$

Iracionálna funkcia (odmocninová)

$f\colon y = \pm x^r = \pm\sqrt[n]{x}$ $r = \frac{1}{n} \wedge n \in \mathbb{N}$

párny $n = 2.k$ $k \in \mathbb{N}$

$D_f = \mathbb{R}_0^+ = \langle 0; \infty)$ $H_f = \mathbb{R}_0^+ = \langle 0; \infty)$

$x \in D_f$ m.↑ N.B. XY (0; 0)

S.B. (0; 0); (1; 1) EXT. nemá

nepárny $n = 2.k + 1$ $k \in \mathbb{N}$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \mathbb{R}$

$x \in D_f$ m.↑ N.B. XY (0; 0)

S.B. (–1; –1); (0; 0); (1; 1) EXT. nemá

Transcendentné funkcie

Exponenciálne a logaritmické funkcie

Exponenciálna $f: y = a^x$ $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$

pre $0 < a < 1$ m.↓ pre $a > 1$ m.↑

N.B. Y(0; 1) S.B. (0; 1)

EXT. nemá

$e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $a^x = e^{x.\ln a}$

Logaritmická $f: y = \log_a x$ $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$D_f = \mathbb{R}^+ = (0; \infty)$ $H_f = \mathbb{R}$

pre $0 < a < 1$ m.↓ pre $a > 1$ m.↑

N.B. X(1; 0) S.B. (1; 0)

EXT. nemá

Uhol

stupňová miera pravý uhol = 90° (360°)

1° = 60' 1' = 60"

oblúková miera (radián) pravý uhol = $\frac{\pi}{2}$rad (2π rad)

stotinná miera (grád – gón) pravý uhol = 100^g (400^g)

$1^g = 100^{cg}$ $1^{cg} = 10^{mg} = 100^{ccg}$

dielec (delostrelecký) pravý uhol = 1500^{-} / 1600^{-} (6000^{-} / 6400^{-})

prevod

$\alpha\,[°] = \frac{x[\text{rad}]}{\pi\text{ rad}}.180°$ $\alpha\,[°] = \frac{\beta[^g]}{10^g}.9°$

$x\,[\text{rad}] = \frac{\alpha[°]}{180°}.\pi\text{ rad}$ $x\,[\text{rad}] = \frac{\beta[^g]}{200^g}.\pi\text{ rad}$

$\beta\,[^g] = \frac{\alpha[°]}{9°}.10^g$ $\beta\,[^g] = \frac{x[\text{rad}]}{\pi\text{ rad}}.200^g$

15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π

Goniometrické (trigonometrické) funkcie a ich inverzné (cyklometrické) funkcie

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\text{tg}\, x.\text{cotg}\, x = 1$

$\text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x}$

$\sec^2 x - \text{tg}^2 x = 1$ $\text{cosec}^2 x - \text{cotg}^2 x = 1$

$\sin x.\text{cosec}\, x = 1$ $\cos x.\sec x = 1$

Sínus $f: y = \sin x$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \langle -1; 1\rangle$

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ m.↑ $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ m.↓

$x \in \left(\frac{(4k-1)\pi}{2}; \frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ m.↑ $x \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}; \frac{(4k+3)\pi}{2}\right)$ m.↓

N.B. $X_k(k.\pi; 0)$ XY(0; 0)

v bode $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k.\pi$ má lokálne maximum v bode $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k.\pi$ má lokálne minimum

periodická: $p = 2\pi$ nepárna funkcia: sin $(-x) = -$sin x

Kosínus f: $y = \cos x$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \langle -1; 1\rangle$

$x \in (0; \pi)$ m.↓ $x \in (\pi; 2\pi)$ m.↑

$x \in (2k.\pi; (2k+1).\pi)$ m.↓ $x \in ((2k-1).\pi; 2k.\pi)$ m.↑

N.B. $X_k\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi; 0\right)$ Y(0; 1)

v bode $x_k = 2k.\pi$ má lokálne maximum v bode $x_k = (2k+1).\pi$ má lokálne minimum

periodická: $p = 2\pi$ párna funkcia: cos $(-x) =$ cos x

Tangens f: $y = \mathrm{tg}\, x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi\right\}$ $H_f = \mathbb{R}$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ m.↑

$x \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}; \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$ m.↑

N.B. $X_k(k.\pi; 0)$ XY(0; 0)

EXT. nemá

periodická: $p = \pi$ nepárna funkcia: tg $(-x) = -$tg x

Kotangens f: $y = \mathrm{cotg}\, x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k.\pi\}$ $H_f = \mathbb{R}$

$x \in (0; \pi)$ m.↓

$x \in (k.\pi; (k+1)\pi)$ m.↓

N.B. $X_k\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi; 0\right)$ EXT. nemá

periodická: $p = \pi$ nepárna funkcia: cotg $(-x) = -$cotg x

Arkus sínus f: $y = \arcsin x$

$D_f = \langle -1; 1\rangle$ $H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

$x \in \langle -1; 1\rangle$ m.↑ N.B. XY(0; 0)

v bode $x_1 = -1$ má minimum v bode $x_2 = 1$ má maximum

nepárna funkcia: arc sin $(-x) = -$arc sin x

Arkus kosínus f: $y = \arccos x$

$D_f = \langle -1; 1\rangle$ $H_f = \langle 0; \pi\rangle$

$x \in \langle -1; 1\rangle$ m.↓ N.B. $Y\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

v bode $x_1 = -1$ má maximum v bode $x_2 = 1$ má minimum

Arkus tangens f: $y = \mathrm{arc\,tg}\, x$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$

$x \in \mathbb{R}$ m.↑ N.B. XY(0; 0)

EXT. nemá nepárna funkcia: arc tg $(-x) = -$arc tg x

Arkus kotangens f: $y = \mathrm{arc\,cotg}\, x$

$D_f = \mathbb{R}$ $H_f = \langle 0; \pi\rangle$

$x \in \mathbb{R}$ m.↓

N.B. $Y\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

EXT. nemá

Doplnkové uhly

$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sec x = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\operatorname{cosec} x = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

periodické

$\sin x = \sin(x + 2k.\pi)$

$\cos x = \cos(x + 2k.\pi)$

$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k.\pi)$

$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k.\pi)$

Ďalšie vlastnosti

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	$\sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = -\cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = -\cos x$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \pm\sin x$
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp\operatorname{cotg} x$
$\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x$	$\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x$	$\operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm x\right) = \mp\operatorname{tg} x$

Hodnoty funkcií vo vybraných uhloch

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
sin *x*	0	1	0	–1
cos *x*	1	0	–1	0
tg *x*	0	–	0	–
cotg *x*	–	0	–	0

	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$
sin *x*	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
cos *x*	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
tg *x*	$2-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$
cotg *x*	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

Druhé mocniny goniometrických funkcií

	$\sin^2 x$	$\cos^2 x$	$\mathrm{tg}^2 x$	$\mathrm{cotg}^2 x$	$\sec^2 x$	$\mathrm{cosec}^2 x$
$\sin^2 x$	–	$1 - \cos^2 x$	$\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$	$\frac{1}{1+\mathrm{cotg}^2 x}$	$\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$	$\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x}$
$\cos^2 x$	$1 - \sin^2 x$	–	$\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}$	$\frac{\mathrm{cotg}^2 x}{1+\mathrm{cotg}^2 x}$	$\frac{1}{\sec^2 x}$	$\frac{\mathrm{cosec}^2 x - 1}{\mathrm{cosec}^2 x}$
$\mathrm{tg}^2 x$	$\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$	–	$\frac{1}{\mathrm{cotg}^2 x}$	$\sec^2 x - 1$	$\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x - 1}$
$\mathrm{cotg}^2 x$	$\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}$	$\frac{\cos^2 x}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}$	–	$\frac{1}{\sec^2 x - 1}$	$\mathrm{cosec}^2 x - 1$
$\sec^2 x$	$\frac{1}{1-\sin^2 x}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$1 + \mathrm{tg}^2 x$	$\frac{1+\mathrm{cotg}^2 x}{\mathrm{cotg}^2 x}$	–	$\frac{\mathrm{cosec}^2 x}{\mathrm{cosec}^2 x - 1}$
$\mathrm{cosec}^2 x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{1-\cos^2 x}$	$\frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{\mathrm{tg}^2 x}$	$1 + \mathrm{cotg}^2 x$	$\frac{\sec^2 x}{\sec^2 x - 1}$	–

Súčtové vzorce

$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$

$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$

$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$

$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

$\mathrm{tg}(x+y) = \frac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,.\mathrm{tg}\,y}$

$\mathrm{tg}(x-y) = \frac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,y}{1 + \mathrm{tg}\,x.\mathrm{tg}\,y}$

$\mathrm{cotg}(x+y) = \frac{\mathrm{cotg}\,x.\mathrm{cotg}\,y - 1}{\mathrm{cotg}\,y + \mathrm{cotg}\,x}$

$\mathrm{cotg}(x-y) = \frac{\mathrm{cotg}\,x.\mathrm{cotg}\,y + 1}{\mathrm{cotg}\,y - \mathrm{cotg}\,x}$

$\sin(x+y+z) = \sin x.\cos y.\cos z + \cos x.\sin y.\cos z + \cos x.\cos y.\sin z - \sin x.\sin y.\sin z$

$\cos(x+y+z) = \cos x.\cos y.\cos z - \sin x.\sin y.\cos z - \sin x.\cos y.\sin z - \cos x.\sin y.\sin z$

Goniometrické funkcie násobkov uhla

$\sin 2x = 2\sin x.\cos x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \frac{1-\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin 4x = 8\cos^3 x.\sin x - 4\cos x.\sin x$

$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$

$\mathrm{tg}\,2x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x} = \frac{2}{\mathrm{cotg}\,x - \mathrm{tg}\,x}$

$\mathrm{cotg}\,2x = \frac{\mathrm{cotg}^2 x - 1}{2\,\mathrm{cotg}\,x} = \frac{\mathrm{cotg}\,x - \mathrm{tg}\,x}{2}$

$\mathrm{tg}\,3x = \frac{3\,\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}^3 x}{1 - 3\,\mathrm{tg}^2 x}$

$\mathrm{cotg}\,3x = \frac{\mathrm{cotg}^3 x - 3\,\mathrm{cotg}\,x}{3\,\mathrm{cotg}^2 x - 1}$

$\mathrm{tg}\,4x = \frac{4\,\mathrm{tg}\,x - 4\,\mathrm{tg}^3 x}{1 - 6\,\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^4 x}$

$\mathrm{cotg}\,4x = \frac{\mathrm{cotg}^4 x - 6\,\mathrm{cotg}^2 x + 1}{4\,\mathrm{cotg}^3 x - 4\,\mathrm{cotg}\,x}$

Goniometrické funkcie polovičného uhla

$\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

$\mathrm{cotg}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

Súčet a rozdiel goniometrických funkcií

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}.\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}.\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

$\text{tg}\, x + \text{tg}\, y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x.\cos y}$ $\quad$ $\text{tg}\, x - \text{tg}\, y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x.\cos y}$

$\text{cotg}\, x + \text{cotg}\, y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x.\sin y}$ $\quad$ $\text{cotg}\, x - \text{cotg}\, y = -\frac{\sin(x-y)}{\sin x.\sin y}$

$\text{tg}\, x + \text{cotg}\, y = \frac{\cos(x-y)}{\cos x.\sin y}$ $\quad$ $\text{cotg}\, x - \text{tg}\, y = \frac{\cos(x+y)}{\sin x.\cos y}$

Hyperbolické funkcie a ich inverzné (hyperbolometrické) funkcie (area alebo argument hyperbolickej funkcie)

$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ $\quad$ $\text{th}\, x.\text{cth}\, x = 1$

$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}$ $\quad$ $\text{cth}\, x = \frac{\text{ch}\, x}{\text{sh}\, x}$

$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\quad$ $\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$\text{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\quad$ $\text{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$\text{sch}\, x = \frac{1}{\text{ch}\, x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$ $\quad$ $\text{csch}\, x = \frac{1}{\text{sh}\, x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$

$\text{arsh}\, x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ $\quad$ $\text{arch}\, x = \ln\left(x \mp \sqrt{x^2 - 1}\right)$

$\text{arth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\pm\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln\sqrt{\pm\frac{1+x}{1-x}}$ $\quad$ $\text{arcth}\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\pm\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\sqrt{\pm\frac{x+1}{x-1}}$

Hyperbolický sínus $\quad$ f: $y = \text{sh}\, x$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $H_f = \mathbb{R}$

x ∈ D_f m.↑ $\quad$ N.B. XY(0; 0)

EXT. nemá $\quad$ nepárna funkcia: sh $(-x) = -$sh x

Hyperbolický kosínus $\quad$ f: $y = \text{ch}\, x$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $H_f = \langle 1; \infty)$

x ∈ $(-\infty; 0)$ m.↓ $\quad$ x ∈ $(0; \infty)$ m.↑

N.B. Y(0; 1) $\quad$ v bode $x_0 = 0$ má minimum

párna funkcia: ch $(-x) =$ ch x

Hyperbolický tangens $\quad$ f: $y = \text{th}\, x$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $H_f = \langle -1; 1\rangle$

x ∈ D_f m.↑ $\quad$ N.B. XY(0; 0)

EXT. nemá $\quad$ nepárna funkcia: th $(-x) = -$th x

Hyperbolický kotangens $\quad$ f: $y = \text{cth}\, x$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad$ $H_f = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$

x ∈ $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ m.↓ $\quad$ N.B. nemá

EXT. nemá $\quad$ nepárna funkcia: cth $(-x) = -$cth x

Area sinus hyperbolicus $\quad$ f: $y = \text{arsh}\, x$

$D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $H_f = \mathbb{R}$

x ∈ D_f m.↑ $\quad$ N.B. XY(0; 0)

EXT. nemá $\quad$ nepárna funkcia: arsh $(-x) = -$arsh x

Area cosinus hyperbolicus $\quad$ f: $y = \text{arch}\, x$

$D_f = \langle 1; \infty)$ $\quad$ $H_f = \mathbb{R}$

x ∈ D_f m.↑

N.B. X(1; 0) $\quad$ v bode $x_0 = 1$ má minimum

Area tangens hyperbolicus f: $y = \text{arth}\ x$

$D_f = \langle -1; 1 \rangle$ $H_f = \mathbb{R}$

$x \in D_f$ m.↑ N.B. XY(0; 0)

EXT. nemá nepárna funkcia: arth $(-x) = -$arth x

Area cotangens hyperbolicus f: $y = \text{arcth}\ x$

$D_f = (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ m.↓ N.B. nemá

EXT. nemá nepárna funkcia: arcth $(-x) = -$arcth x

Druhé mocniny hyperbolických funkcií

	$\text{sh}^2 x$	$\text{ch}^2 x$	$\text{th}^2 x$	$\text{cth}^2 x$	$\text{sch}^2 x$	$\text{csch}^2 x$
$\text{sh}^2 x$	–	$\text{ch}^2 x - 1$	$\frac{\text{th}^2 x}{1-\text{th}^2 x}$	$\frac{1}{\text{cth}^2 x - 1}$	$\frac{1-\text{sch}^2 x}{\text{sch}^2 x}$	$\frac{1}{\text{csch}^2 x}$
$\text{ch}^2 x$	$1 + \text{sh}^2 x$	–	$\frac{1}{1-\text{th}^2 x}$	$\frac{\text{cth}^2 x}{\text{cth}^2 x - 1}$	$\frac{1}{\text{sch}^2 x}$	$\frac{1+\text{csch}^2 x}{\text{csch}^2 x}$
$\text{th}^2 x$	$\frac{\text{sh}^2 x}{1+\text{sh}^2 x}$	$\frac{\text{ch}^2 x - 1}{\text{ch}^2 x}$	–	$\frac{1}{\text{cth}^2 x}$	$1 - \text{sch}^2 x$	$\frac{1}{1+\text{csch}^2 x}$
$\text{cth}^2 x$	$\frac{1+\text{sh}^2 x}{\text{sh}^2 x}$	$\frac{\text{ch}^2 x}{\text{ch}^2 x - 1}$	$\frac{1}{\text{th}^2 x}$	–	$\frac{1}{1-\text{sch}^2 x}$	$\text{csch}^2 x + 1$
sch2 x	$\frac{1}{1+\text{sh}^2 x}$	$\frac{1}{\text{ch}^2 x}$	$1 - \text{th}^2 x$	$\frac{\text{cth}^2 x - 1}{\text{cth}^2 x}$	–	$\frac{\text{csch}^2 x}{1+\text{csch}^2 x}$
csch2 x	$\frac{1}{\text{sh}^2 x}$	$\frac{1}{\text{ch}^2 x - 1}$	$\frac{1-\text{th}^2 x}{\text{th}^2 x}$	$\text{cth}^2 x - 1$	$\frac{\text{sch}^2 x}{1-\text{sch}^2 x}$	–

Súčtové vzorce

$\text{sh}\,(x+y) = \text{sh}\,x.\text{ch}\,y + \text{ch}\,x.\text{sh}\,y$ $\text{sh}\,(x-y) = \text{sh}\,x.\text{ch}\,y - \text{ch}\,x.\text{sh}\,y$

$\text{ch}\,(x+y) = \text{ch}\,x.\text{ch}\,y + \text{sh}\,x.\text{sh}\,y$ $\text{ch}\,(x-y) = \text{ch}\,x.\text{ch}\,y - \text{sh}\,x.\text{sh}\,y$

$\text{th}\,(x+y) = \frac{\text{th}\,x + \text{th}\,y}{1+\text{th}\,x.\text{th}\,y}$ $\text{th}\,(x-y) = \frac{\text{th}\,x - \text{th}\,y}{1-\text{th}\,x.\text{th}\,y}$

$\text{cth}\,(x+y) = \frac{1+\text{cth}\,x.\text{cth}\,y}{\text{cth}\,x+\text{cth}\,y}$ $\text{cth}\,(x-y) = \frac{1-\text{cth}\,x.\text{cth}\,y}{\text{cth}\,x-\text{cth}\,y}$

Hyperbolické funkcie dvojnásobného uhla

$\text{sh}\,2x = 2\text{sh}\,x.\text{ch}\,y$ $\text{ch}\,2x = \text{sh}^2 x + \text{ch}^2 x$

$\text{th}\,2x = \frac{2\,\text{th}\,x}{1+\text{th}^2 x}$ $\text{cth}\,2x = \frac{1+\text{cth}^2 x}{2\,\text{cth}\,x}$

Hyperbolické funkcie polovičného uhla

$\text{sh}\,\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{\text{ch}\,x-1}{2}}$ $\text{ch}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{\text{ch}\,x+1}{2}}$

$\text{th}\,\frac{x}{2} = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x+1} = \frac{\text{ch}\,x-1}{\text{sh}\,x}$ $\text{cth}\,\frac{x}{2} = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x-1} = \frac{\text{ch}\,x+1}{\text{sh}\,x}$

Súčet a rozdiel hyperbolických funkcií

$\text{sh}\,x + \text{sh}\,y = 2\,\text{sh}\,\frac{x+y}{2}.\text{ch}\,\frac{x-y}{2}$ $\text{sh}\,x - \text{sh}\,y = 2\,\text{ch}\,\frac{x+y}{2}.\text{sh}\,\frac{x-y}{2}$

$\text{ch}\,x + \text{ch}\,y = 2\,\text{ch}\,\frac{x+y}{2}.\text{ch}\,\frac{x-y}{2}$ $\text{ch}\,x - \text{ch}\,y = 2\,\text{sh}\,\frac{x+y}{2}.\text{sh}\,\frac{x-y}{2}$

$\text{th}\,x + \text{th}\,y = \frac{\text{sh}(x+y)}{\text{ch}\,x.\text{ch}\,y}$ $\text{th}\,x - \text{th}\,y = \frac{\text{sh}(x-y)}{\text{ch}\,x.\text{ch}\,y}$

Ďalšie funkcie

Signum $f: y = \operatorname{sig} x$

$$\operatorname{sig} x = \begin{cases} -1 & , ak\ x < 0 \\ 0 & , ak\ x = 0 \\ 1 & , ak\ x > 0 \end{cases}$$

(Dolná) Celá časť $f: y = [x]$

$[x] \coloneqq \max \{n \in \mathbb{Z} |\ n \leq x\}$

$[x] = x \bmod 1$

Horná celá časť $f: y = \lceil x \rceil$

$\lceil x \rceil \coloneqq \min \{n \in \mathbb{Z} |\ n \geq x\}$

Desatinná časť $f: y = \{x\}$

$\{x\} = x - [x]$

Funkcia beta $f: \mathrm{B}(x, y) \coloneqq \int_0^1 t^{x-1}.(1-t)^{y-1}\, dt$ (*Euler*)

$\mathrm{B}(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$

Funkcia gama $f: \Gamma(x) \coloneqq \int_0^\infty t^{x-1}.e^{-t} dt$ (*Euler*)

$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ pre $x \in \mathbb{N}$ $\Gamma(x) = (x-1)!$

$\Gamma(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} \frac{n!.n^{x-1}}{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}$ (*Gauss*)

Algebrické krivky

Semikubická (*Neil*ova) parabola	$a.x^3 - y^2 = 0$	$a > 0$
*Agnesi*ova krivka	$(x^2 + a^2).y - a^3 = 0$	$a > 0$
*Descartes*ov list	$x^3 + y^3 - 3axy = 0$	$a > 0$
*Diokles*ova cisoida	$x^3 + (x - a).y^2 = 0$	$a > 0$
Strofoida	$(x + a).x^2 + (x - a).y^2 = 0$	$a > 0$
*Nikomed*ova konchoida	$(x - a)^2.(x^2 + y^2) - b^2.x^2 = 0$	$a; b > 0$
*Pascal*ova špirála	$(x^2 + y^2 - ax)^2 - l^2.(x^2 + y^2) = 0$	$a; l > 0$
Kardioida (srdcovka)	$(x^2 + y^2).(x^2 + y^2 - 2ax) - a^2.x^2 = 0$	$a > 0$
*Cassigni*ove krivky	$(x^2 + y^2)^2 - 2.c^2.(x^2 - y^2) - (a^4 - c^4) = 0$	$a; c > 0$
Lemniskáta	$(x^2 + y^2)^2 - 2.a^2.(x^2 - y^2) = 0$	$a > 0$
Obyčajný cyklois	$a.\cos \frac{x+\sqrt{y.(2a-y)}}{a} = a - y$	$a > 0$
Ampersand	$(y^2 - x^2).(x - 1)(2x - 3) - 4(x^2 + y^2 - 2x) = 0$	
Astroida	$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} - \sqrt[3]{a^2} = 0$	
Mašľa	$x^4 + y^3 - x^2.y = 0$	
de Sluze mušle	$x^3 - y^2 - ax^2 = 0$	
Démonická krivka	$x^2.(x^2 - b^2) - y^2.(y^2 - a^2) = 0$	
Srdce	$(x^2 + y^2 - 1)^3 - x^2.y^3 = 0$	
Maltský kríž	$x^3.y - x.y^3 - x^2 - y^2 = 0$	
Štvorlístok (quadrifolium)	$(x^2 + y^2)^3 - 4a^2.x^2.y^2 = 0$	
(Rectellipse)	$s^2.\frac{x^2}{a^2}.\frac{y^2}{b^2} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + 1 = 0$	
Skarabeus	$(x^2 + y^2).(x^2 + y^2 - ax)^2 - b^2.(x^2 - y^2) = 0$	
Strmeň	$y^2.(y - 1).(y - 2).(y + 5) - (x^2 - 1)^2 = 0$	

Trojlístok (trifolium) $(x^2 + y^2)^2 - a.(x^3 - 3xy^2) = 0$

Transformácie funkcií

g: $y = a.f(d.x + b) + c$ — $a; b; c; d \in \mathbb{R} \wedge a; d \neq 0$

g_1: $y = a.f(x)$ — kolmá osová afinita na os x s koeficientom a

g_2: $y = f(x + b)$ — posúvanie v smere x-ovej osi o $-b$

g_3: $y = f(x) + c$ — posúvanie v smere y-ovej osi o c

g_4: $y = f(d.x)$ — kolmá osová afinita na os y s koeficientom $\frac{1}{d}$

Geometria

Zhodné zobrazenia (izometria)

$\forall A, B: \mathcal{Z}(A) = A' \wedge \mathcal{Z}(B) = B' \Rightarrow |AB| = |A'B'|$

Identické zobrazenie (identita) $\mathcal{I}$

1. $\forall A: \mathcal{I}(A) = A$ — samodružný bod

Stredová súmernosť (centrálna symetria) $\mathcal{S}$

1. $\exists!\, S: \mathcal{S}(S) = S$ — samodružný bod
2. $\forall A: \mathcal{S}(A) = A' \Rightarrow S \in AA'$
3. $\forall A: \mathcal{S}(A) = A' \Rightarrow |AS| = |SA'|$
4. $\forall A: A \neq S \Rightarrow A \neq A'$

$\forall A, B: \mathcal{S}(A) = A' \wedge \mathcal{S}(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$

$\forall A: \mathcal{S}(\mathcal{S}(A)) = A$ — involúcia

Osová súmernosť (osová symetria) $\mathcal{O}$

1. $\exists!\, o: \forall A \in o \Rightarrow \mathcal{O}(A) = A$ — každý bod osi je samodružným bodom
2. $\forall A: \mathcal{O}(A) = A' \Rightarrow AA' \perp o$
3. $\forall A: \mathcal{O}(A) = A' \Rightarrow |Ao| = |A'o|$
4. $\forall A: A \notin o \Rightarrow A \neq A'$

$\forall A, B: \mathcal{O}(A) = A' \wedge \mathcal{O}(B) = B' \Rightarrow AB \cap A'B' \in o$

$\forall A: \mathcal{O}(\mathcal{O}(A)) = A$ — involúcia

Posúvanie (translácia) $\mathcal{T}$

1. $\forall A, B: \mathcal{T}(A) = A' \wedge \mathcal{T}(B) = B' \Rightarrow AA' \parallel BB'$
2. $\forall A, B: \mathcal{T}(A) = A' \wedge \mathcal{T}(B) = B' \Rightarrow |AA'| = |BB'|$
3. $\forall A, B: \mathcal{T}(A) = A' \wedge \mathcal{T}(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$

Otáčanie (rotácia) $\mathcal{R}$

1. $\exists!\, S: \mathcal{R}(S) = S$ — samodružný bod
2. $\forall A, B: \mathcal{R}(A) = A' \wedge \mathcal{R}(B) = B' \Rightarrow |\sphericalangle ASA'| = |\sphericalangle BSB'|$
3. $\forall A: \mathcal{R}(A) = A' \Rightarrow |AS| = |A'S|$
4. $\forall A, B: \mathcal{R}(A) = A' \wedge \mathcal{R}(B) = B' \Rightarrow |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'SB'|$

Zhodnosť trojuholníkov $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

1. $AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge CA \cong C'A'$ — *s-s-s*
2. $AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge \beta = \beta'$ — *s-u-s*
3. $AB \cong A'B' \wedge \alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta'$ — *u-s-u*
4. $AB \cong A'B' \wedge BC \cong B'C' \wedge \alpha = \alpha' \wedge |AB|<|BC|$ — *S-s-u*

Podobné zobrazenia

$\forall A, B: \mathcal{L}(A) = A' \wedge \mathcal{L}(B) = B' \Rightarrow |\lambda|.|AB| = |A'B'|$ λ – koeficient podobnosti

Rovnoľahlosť (homotetia) $\mathcal{H}$

1. $\exists!\ S: \mathcal{H}(S) = S$ samodružný bod
2. $\forall A: \mathcal{H}(A) = A' \Rightarrow S \in AA'$
3. $\forall A: \mathcal{H}(A) = A' \Rightarrow |\lambda|.|AS| = |SA'|$
4. $\forall A: \mathcal{H}(A) = A'$, ak $\lambda > 0 \Rightarrow A' \in \overrightarrow{AS}$,
   $\lambda < 0 \Rightarrow A' \notin \overrightarrow{AS}$

$\forall A, B: \mathcal{H}(A) = A' \wedge \mathcal{H}(B) = B' \Rightarrow AB \parallel A'B'$

Podobnosť trojuholníkov $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

1. $|\lambda|.|AB| = |A'B'| \wedge |\lambda|.|BC| = |B'C'| \wedge |\lambda|.|CA| = |C'A'|$ *s-s-s*
2. $|\lambda|.|AB| = |A'B'| \wedge |\lambda|.|BC| = |B'C'| \wedge \beta = \beta'$ *s-u-s*
3. $\alpha = \alpha' \wedge \beta = \beta' \wedge \gamma = \gamma'$ *u-u-u*
4. $|\lambda|.|AB| = |A'B'| \wedge |\lambda|.|BC| = |B'C'| \wedge \alpha = \alpha' \wedge |AB| < |BC|$ *S-s-u*

Osová afinita $\mathcal{A}$

1. $\exists!\ o: \forall A \in o \Rightarrow \mathcal{A}(A) = A$ každý bod osi je samdružným bodom
2. $\forall A, B: \mathcal{A}(A) = A' \wedge \mathcal{A}(B) = B' \Rightarrow AA' \parallel BB'$
3. $\forall A: \mathcal{A}(A) = A' \Rightarrow |\lambda|.|Ao| = |A'o|$
4. $\forall A: \mathcal{A}(A) = A'$, ak $\lambda > 0 \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cap o = \emptyset$
   $\lambda < 0 \Rightarrow \overrightarrow{AA'} \cap o = \{M\}$

$\forall A, B: \mathcal{A}(A) = A' \wedge \mathcal{A}(B) = B' \Rightarrow AB \cap A'B' \in o$

Inverzia $\mathcal{I}$

O pól inverzie

1. $\exists!\ k:(O, r): \forall A \in k \Rightarrow \mathcal{I}(A) = A$ každý bod kružnice je samodružným bodom
2. $\forall A: \mathcal{I}(A) = A' \Rightarrow O \in AA'$
3. $\forall A: \mathcal{I}(A) = A' \Rightarrow |OA|.|OA'| = r^2$
4. $\forall A: \mathcal{I}(A) = A' \Rightarrow A' \in \overrightarrow{OA}$

$\forall p: O \notin p \Rightarrow \mathcal{I}(p) = l \wedge O \in l$ obrazom priamky neobsahujúcej pól je pólom prechádzajúca kružnica

$\forall p: O \in p \Rightarrow \mathcal{I}(p) = p$ priamka prechádzajúca pólom je samodružným útvarom

Zlatý rez

daná je úsečka veľkosti *a*

treba ju rozdeliť na časti *x* a *a* – *x*, aby $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$

pomer zlatého rezu $\varphi = \lambda_{Au} = \frac{x}{a-x}$

z toho vznikne rovnica $\lambda_{Au}^2 - \lambda_{Au} - 1 = 0$

riešením dostaneme $\lambda_{Au} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

Trojuholníky

Všeobecný trojuholník

$b + c > a$ $\alpha + \beta + \gamma = 180°$

dĺžka výšky	$v_a = b.\sin\gamma = c.\sin\beta$
dĺžka ťažnice	$t_a = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2} = \frac{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cos\alpha}}{2}$
dĺžka osi uhla	$o_\alpha = \frac{\sqrt{bc((b+c)^2-a^2)}}{b+c} = \frac{2bc\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c} = \frac{2ac\cos\frac{\beta}{2}}{b+c}$
os uhla delí stranu	$a = m + n \Rightarrow m : n = c : b$
polomer opísanej kružnice	$r = \frac{abc}{4S} = \frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{2\sin\alpha}$
polomer vpísanej kružnice	$\rho = \frac{2S}{o} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = s.\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}.\mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}.\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$
	$\rho = 4r.\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} = (s-c).\mathrm{tg}\,\frac{\gamma}{2}$
polomer pripísanej kružnice	$r_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}} = s.\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 4r.\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\gamma}{2}$
sínusová veta	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$
kosínusová veta	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$
tangensová veta	$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$
vzorce polovičných uhlov	$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$
	$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$
	$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$
*Mollweid*ove vzorce	$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$
	$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$
vzorec kosínus	$c = a.\cos\beta + b.\cos\alpha$
vzorec tangens	$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{c.\sin\alpha}{b-c.\cos\alpha} = \frac{c.\sin\beta}{a-c.\cos\beta}$

Obsah trojuholníka

$o = a + b + c$

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{o}{2}$

$S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{ab.\sin\gamma}{2} = \frac{\rho.(a+b+c)}{2} = \frac{\rho.o}{2} = \rho.s = \frac{abc}{4r} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$S = 2r^2.\sin\alpha.\sin\beta.\sin\gamma = c^2.\frac{\sin\alpha.\sin\beta}{2.\sin\gamma}$

Rovnostranný (pravidelný) trojuholník

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}.a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.v^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.r^2 = 3\sqrt{3}.\rho^2$	$v = t = o = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
$r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$	$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

Pravouhlý trojuholník

*Pytagor*ova veta	$a^2 + b^2 = c^2$
*Euklid*ove vety	$a^2 = c.c_a \quad a = \sqrt{c.c_a}$
	$b^2 = c.c_b \quad b = \sqrt{c.c_b}$
	$v^2 = c_a.c_b \quad v = \sqrt{c_a.c_b}$

$S = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2} = \frac{a^2 \operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{c^2 \sin 2\beta}{4} = r^2.\sin 2\beta$ $\qquad v = \frac{ab}{c}$

$r = \frac{c}{2}$ $\qquad \rho = \frac{ab}{a+b+c}$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\quad \cos\alpha = \frac{b}{c}$; $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Pytagorejské trojice

$a = 2dst \quad b = d(s^2 - t^2) \quad c = d(s^2 + t^2) \qquad d; s; t \in \mathbb{N} \wedge s > t$

a	3	5	7	8	9	11	12	13	16	20	28	33	36	39	48	65
b	4	12	24	15	40	60	35	84	63	21	45	56	77	80	55	72
c	5	13	25	17	41	61	37	85	65	29	53	65	85	89	73	97

Štvoruholníky

Všeobecný štvoruholník

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$

$o = a + b + c + d$ $\qquad S = \frac{ef.\sin\varphi}{2}$

$s = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{o}{2}$ $\qquad \theta = \frac{\alpha+\gamma}{2} \vee \frac{\beta+\delta}{2}$

*Bretschneider*ova-formula $\qquad S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd.\cos^2\theta}$

Dotyčnicový štvoruholník

$a + c = b + d$

Tetivový štvoruholník

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$

*Ptolemai*ova veta $\qquad a.c + b.d = e.f$

*Brahmagupt*ova veta $\qquad S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Deltoid

$S = \frac{ef}{2}$

Lichobežník

$S = \frac{a+c}{2}.v = p.v = \frac{a+c}{4(a-c)}\sqrt{(a+b-c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)(-a+b+c+d)}$

stredná priečka: $p = \frac{a+b}{2}$ $\qquad$ výška: $v = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d^2-b^2+(a-c)^2}{2(a-c)}\right)^2}$

rovnoramenný lichobežník $\qquad S = (a - b.\cos\alpha)b.\sin\alpha = (c + b.\cos\alpha)b.\sin\alpha$

Rovnobežník

$2(a^2 + b^2) = e^2 + f^2$

$o = 2(a + b)$ $\qquad S = a.v_a = a.b.\sin\alpha = \frac{ef.\sin\varphi}{2}$

Kosoštvorec

$e^2 + f^2 = 4a^2$

$e = 2a.\cos\frac{\alpha}{2}$ $\qquad f = 2a.\sin\frac{\alpha}{2}$

$o = 4a$ $\qquad S = a.v = a^2.\sin\alpha = \frac{ef}{2}$

Obdĺžnik

$e^2 = a^2 + b^2$

$o = 2(a + b)$ $\qquad S = a.b = \frac{e^2.\sin\varphi}{2}$

Štvorec

$e = a\sqrt{2}$

$o = 4a$ $\qquad$ $S = a^2 = \frac{e^2}{2}$

Pravidelný mnohouholník

počet uhlopriečok $\qquad$ $m = \frac{n.(n-3)}{2}$

stredový uhol $\qquad$ $\omega = \frac{360°}{n}$

vnútorný uhol $\qquad$ $\alpha = \frac{n-2}{n}.180° = 180° - \omega$

strana $\qquad$ $a = 2\sqrt{r^2 - \rho^2} = 2r.\sin\frac{\omega}{2} = 2\rho.\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{e_1}{2.\cos\frac{\omega}{2}}$

polomer vpísanej kružnice $\qquad$ $\rho = \sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}} = r.\cos\frac{\omega}{2} = \frac{e_1}{4.\sin\frac{\omega}{2}}$

polomer opísanej kružnice $\qquad$ $r = \sqrt{\rho^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2\sin\frac{\omega}{2}} = \frac{\rho}{\cos\frac{\omega}{2}} = \frac{e_1}{2.\sin\omega}$

najkratšia uhlopriečka $\qquad$ $e_1 = 2a.\cos\frac{\omega}{2} = 4\rho.\sin\frac{\omega}{2} = 2r.\sin\omega$

$S = \frac{1}{4}n.a^2.\mathrm{cotg}\,\frac{\omega}{2} = n.\rho^2.\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}n.r^2.\sin\omega = \frac{1}{8}n.e_1^2\,\frac{1}{\sin\omega}$

Kružnica a kruh

$o = 2\pi r$ $\qquad$ $S = \pi r^2$

dĺžka kružnicového oblúka $\qquad$ $l = \frac{2\pi r}{360°}\omega$

dĺžka tetivy $\qquad$ $h = 2\sqrt{2vr - v^2} = 2r.\sin\frac{\omega}{2}$

výška kruhového odseku $\qquad$ $v = r - \sqrt{r^2 - \frac{h^2}{4}} = r\left(1 - \cos\frac{\omega}{2}\right) = \frac{a}{2}.\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{4}$

kruhový odsek $\qquad$ $S = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\omega}{180°} - \sin\omega\right) = \frac{1}{2}(lr - h(r - v))$

kruhový výsek $\qquad$ $S = \frac{\pi r^2}{360°}\omega$

medzikružie $\qquad$ $S = \pi(r_1^2 - r_2^2)$

výsek z medzikružia $\qquad$ $S = \frac{\pi(r_1^2 - r_2^2)}{360°}\omega$

Elipsa

$S = \pi ab$ $\qquad$ $o = 2\pi a\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left[\prod_{m=1}^{n}\frac{2m-1}{2m}\right]^2 \frac{e^{2n}}{2n-1}\right\}\right)$

$o \approx 4\frac{\pi ab + (a-b)^2}{a+b} \approx \pi\left[\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab}\right] \approx \pi\left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$

Objemy

*Cavalieri*ho princíp: Ak máme dve telesá položené na jednu rovinu, ktorých obsahy podstáv sa rovnajú, a ak zoberieme ľubovoľnú rovinu rovnobežnú s tou rovinou, a pritom vzniknuté rovinné rezy jedného a druhého telesa majú rovnaké obsahy, potom aj objemy tých telies sa rovnajú.

Hranoly

$S = 2S_p + S_{pl}$ $\qquad$ $V = S_p v$

Kváder

$S = 2(ab + ac + bc)$ $\qquad$ $V = abc$

$u_{s1} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\qquad$ $u_{s2} = \sqrt{a^2 + c^2}$

$u_{s3} = \sqrt{b^2 + c^2}$ $u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Kocka

$S = 6a^2$ $V = a^3$

$u_s = \sqrt{2}a$ $u_t = \sqrt{3}a$

Valce

$S = 2S_p + S_{pl}$ $V = S_p v$

Rotačný valec

$S = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r + v)$ $V = \pi r^2 v$

Ihlany

$S = S_p + S_{pl}$ $V = \frac{S_p v}{3}$

Pyramída

$S = a^2 + 2a\sqrt{\frac{a^2+4v^2}{4}}$ $V = \frac{a^2 v}{3}$

Pravidelný štvorsten

$S = \sqrt{3}a^2$ $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

$v = \sqrt{\frac{2}{3}}a^2 = \frac{\sqrt{6}}{3}a^2$

Kužele

$S = S_p + S_{pl}$ $V = \frac{S_p v}{3}$

Rotačný kužeľ

$S = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r + s)$ $V = \frac{\pi r^2 v}{3}$

$s^2 = r^2 + v^2$

Zrezaný ihlan

$S = S_1 + S_2 + S_{pl}$ $V = \frac{v}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$

Zrezaný kužeľ

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi s(r_1 + r_2)$ $V = \frac{\pi v}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)$

Guľa

$S = 4\pi r^2$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Guľový vrchlík

$S = 2\pi r v$

Guľový odsek

$S = \pi\rho^2 + 2\pi r v$

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$

Guľový pás

$S = 2\pi r v$

Guľová vrstva

$S = \pi\rho_1^2 + \pi\rho_2^2 + 2\pi r v$

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$

Guľový výsek

$S = \pi\rho r + 2\pi r v = \pi r(\rho + 2v)$ $V = \frac{2}{3}\pi r^2 v$

Elipsoid

$u = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$ $v = \frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b}$

V = $\frac{4}{3}\pi abc$ S = $2\pi c^2 + 2\pi ab \int_0^1 \frac{1 - u^2v^2x^2}{\sqrt{1-u^2x^2}\sqrt{1-v^2x^2}}dx$

S ≈ $4\pi\left[\frac{(ab)^{1,6}+(ac)^{1,6}+(bc)^{1,6}}{3}\right]^{0,625}$

Pravidelné (Platónske) telesá

	s	***h***	***v***
štvorsten – tetraéder	4 – trojuholník	6	4
kocka – hexaéder	6 – štvorec	12	8
osemsten – oktaéder	8 – trojuholník	12	6
dvanásťsten – dodekaéder	12 – päťuholník	30	20
dvadsaťsten – ikosaéder	20 – trojuholník	30	12

*Euler*ova veta: $v + s = h + 2$

Štvorsten

S = $\sqrt{3}a^2$ V = $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

ρ = $\frac{\sqrt{6}}{12}a$ r = $\frac{\sqrt{6}}{4}a$

Kocka

S = $6a^2$ V = a^3

ρ = $\frac{1}{2}a$ r = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

Osemsten

S = $2\sqrt{3}a^2$ V = $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

ρ = $\frac{\sqrt{6}}{6}a$ r = $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

Dvanásťsten

S = $3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$ V = $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$

ρ = $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{21+11\sqrt{5}}{10}}a = \sqrt{\frac{21+11\sqrt{5}}{400}}a$ r = $\sqrt{3}\,\frac{1+\sqrt{5}}{4}a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{4}a$

Dvadsaťsten

S = $5\sqrt{3}a^2$ V = $\frac{15+5\sqrt{5}}{12}a^3$

ρ = $\frac{\sqrt{42+18\sqrt{5}}}{12}a$ r = $\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}a$

Lineárna algebra

Vektory

V rovine

dané sú A = (x_A; y_A); B = (x_B; y_B); C = (x_C; y_C)

$\vec{A} = \overrightarrow{OA}$ = A – O = (x_A – 0; y_A – 0) = (x_A; y_A) polohový vektor bodu (bod ako základné umiestnenie vektora)

S = $\frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ stred úsečky

ak |AP|:|PB| = m : n, potom:

$P = \frac{nA+mB}{m+n} = \left(\frac{nx_A+mx_B}{m+n}; \frac{ny_A+my_B}{m+n}\right)$ rozdelenie úsečky na úseky s daným pomerom

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ veľkosť úsečky

$T = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$ ťažisko △ABC

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ vektor daný orientovanou úsečkou

dané sú $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ súčet vektorov

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2)$ násobenie vektora skalárom (číslom)

$\vec{a}.\vec{b} = (\vec{a}; \vec{b}) = a_1.b_1 + a_2.b_2$ skalárny súčin dvoch vektorov

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$ veľkosť vektora

$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ uhol (odchýlka) dvoch vektorov

$$\vec{a} = \lambda_1.\overrightarrow{x_1} + \lambda_2.\overrightarrow{x_2} + \lambda_3.\overrightarrow{x_3} + \dots + \lambda_n.\overrightarrow{x_n} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{x_i}$$

$\vec{a}$ je lineárnou kombináciou vektorov $\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n}$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{x_i} = 0 \Leftrightarrow \forall\, i \in \mathbb{N} \wedge i \in \langle 1; n\rangle \Rightarrow \lambda_i = 0$ vektory $\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n}$ sú lineárne nezávislé

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\overrightarrow{x_i} = 0 \wedge \exists\, i \in \mathbb{N} \wedge i \in \langle 1; n\rangle \Rightarrow \lambda_i \neq 0$ vektory $\overrightarrow{x_1}; \overrightarrow{x_2}; \dots; \overrightarrow{x_n}$ sú lineárne závislé

Vlastnosti veľkosti vektora

$|\vec{a}| \geq 0$ a $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$|\lambda\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|$

$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ trojuholníková nerovnosť

$\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$

V priestore

$A = (x_A; y_A; z_A)$; $B = (x_B; y_B; z_B)$

$S = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ stred úsečky

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ veľkosť úsečky

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ vektor daný orientovanou úsečkou

dané sú $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$ súčet vektorov

$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$ násobenie vektora skalárom (číslom)

$\vec{a}.\vec{b} = (\vec{a}; \vec{b}) = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ skalárny súčin

$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}; \vec{b}] = (a_2.b_3 - a_3.b_2; a_3.b_1 - a_1.b_3; a_1.b_2 - a_2.b_1)$

vektorový súčin

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\sin\varphi$ obsah rovnobežníka

$$|\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}| = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1.b_2.c_3 + a_2.b_3.c_1 + a_3.b_1.c_2 - a_3.b_2.c_1 - a_1.b_3.c_2 - a_2.b_1.c_3$$

zmiešaný súčin – objem rovnobežnostena

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a}.\vec{a}}$ veľkosť vektora

$\cos\varphi = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$ uhol (odchýlka) dvoch vektorov

Ďalšie vlastnosti

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$(\lambda + \mu).\vec{a} = \lambda.\vec{a} + \mu.\vec{a}$ $\lambda.(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda.\vec{a} + \lambda.\vec{b}$

$\lambda.(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu).\vec{a}$

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}.(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}.(\vec{a}.\vec{b})$ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$

$|\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}| = |\vec{b}; \vec{c}; \vec{a}| = |\vec{c}; \vec{a}; \vec{b}| = -|\vec{a}; \vec{c}; \vec{b}|$

Priamka

V rovine

$B_0(x_0; y_0) \in p$ daný bod B_0 priamky p

$B(x; y) \in p$; $B(r; \varphi) \in p$ všeobecný bod B priamky p

$\vec{r_0} = \overrightarrow{OB_0}$; $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ polohové vektory bodov B_0 a B

$X = (a; 0)$; $Y = (0; b)$ osové body priamky p

$\alpha \in \langle 0; 2\pi)$ smerový uhol priamky kolmej na p z bodu O (alebo z pólu)

$p = |Op|$ vzdialenosť priamky p od bodu O (alebo od pólu)

$\vec{s_p}(s_1; s_2)$: $\vec{s_p} \parallel p$ smerový vektor priamky p

$\vec{n_p}(n_1; n_2)$: $\vec{n_p} \perp p$ normálový vektor priamky p

$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ smerový uhol priamky p

$k_p = \operatorname{tg}\varphi = \frac{s_2}{s_1} = -\frac{n_1}{n_2}$ smernica priamky p

Vektorová rovnica $p: \vec{n_p}.(\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$

Všeobecná rovnica $p: n_1.x + n_2.y + c = 0$ $c \in \mathbb{R}$

$c = -n_1.x_0 - n_2.y_0$

Smernicová rovnica $p: y - y_0 = k_p.(x - x_0)$

$p: y = k_p.x + b$ $b \in \mathbb{R}$

$b = y_0 - k_p.x_0$

Parametrická rovnica $p: x = x_0 + s_1.t$ $t \in \mathbb{R}$

$y = y_0 + s_2.t$

Úseková rovnica $p: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Normálny tvar $p: x.\cos\alpha + y.\sin\alpha - p = 0$

Rovnica v polárnej súradnicovej sústave $p: r = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}$

Vzdialenosť bodu od priamky $|A; p| = \frac{|n_1.x_A + n_2.y_A + c|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$

Uhol dvoch priamok $\cos\varphi = \frac{\vec{s_e}.\vec{s_f}}{|\vec{s_e}|.|\vec{s_f}|} = \frac{\vec{n_e}.\vec{n_f}}{|\vec{n_e}|.|\vec{n_f}|}$

rovnobežné priamky $e \parallel f \Rightarrow \vec{s_e} \parallel \vec{s_f} \wedge \vec{n_e} \parallel \vec{n_f} \wedge \vec{s_e} \perp \vec{n_f}$

kolmé priamky $e \perp f \Rightarrow \vec{s_e} \perp \vec{s_f} \wedge \vec{n_e} \perp \vec{n_f} \wedge \vec{s_e} \parallel \vec{n_f}$

V priestore

$B_0(x_0; y_0; z_0) \in p$ daný bod B_0 priamky p

$B(x; y; z) \in p$ — všeobecný bod B priamky p

$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OB_0}$; $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ — polohové vektory bodov B_0 a B

$\overrightarrow{s_p}(s_1; s_2; s_3)$: $\overrightarrow{s_p} \parallel p$ — smerový vektor priamky p

Vektorová rovnica p: $\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + t.\overrightarrow{s_p}$ $\quad t \in \mathbb{R}$

Parametrická rovnica p: $x = x_0 + s_1.t$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$y = y_0 + s_2.t$

$z = z_0 + s_3.t$

Vzdialenosť bodu od priamky $|A; p| = \dfrac{|\overrightarrow{AB_0} \times \overrightarrow{s_p}|}{\sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}}$

Rovina

$\vec{e} = (e_1; e_2; e_3)$; $\vec{f} = (f_1; f_2; f_3) \subset \rho$ — dva lineárne nezávislé vektory roviny ρ

$B_0(x_0; y_0; z_0) \in \rho$ — daný bod B_0 roviny ρ

$B(x; y; z) \in \rho$ — všeobecný bod B roviny ρ

$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OB_0}$; $\vec{r} = \overrightarrow{OB}$ — základné umiestnenia vektorov bodov B_0 a B

$X = (a; 0; 0)$; $Y = (0; b; 0)$; $Z = (0; 0; c)$ — osové body roviny ρ

$\overrightarrow{n_\rho}(n_1; n_2; n_3)$: $\overrightarrow{n_\rho} \perp \rho$ — normálový vektor roviny ρ

Vektorová rovnica ρ: $\overrightarrow{n_\rho}.(\vec{r} - \overrightarrow{r_0}) = 0$

Parametrická rovnica ρ: $x = x_0 + e_1.t + f_1.u$ $\quad t; u \in \mathbb{R}$

$y = y_0 + e_2.t + f_2.u$

$z = z_0 + e_3.t + f_3.u$

Všeobecná rovnica ρ: $n_1.(x - x_0) + n_2.(y - y_0) + n_3.(z - z_0) = 0$

ρ: $n_1.x + n_2.y + n_3.z + d = 0$ $\quad d \in \mathbb{R}$

$d = -n_1.x_0 - n_2.y_0 - n_3.z_0$

Úseková rovnica ρ: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

Vzdialenosť bodu od roviny $|A; \rho| = \dfrac{|n_1.x_A + n_2.y_A + n_3.z_A + d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$

Uhol dvoch rovín $\cos\varphi = \dfrac{\|\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}\|}{\|\overrightarrow{n_\alpha}\|.\|\overrightarrow{n_\beta}\|}$

Krivky druhého rádu

Kružnica

k: $(S(u; v); r)$

Stredová rovnica k: $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$

Všeobecná rovnica k: $A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$

$A; B; C; D; E \in \mathbb{R} \wedge A = B \wedge C^2 + D^2 - 4AE > 0$

k: $\left(x + \dfrac{C}{2A}\right)^2 + \left(y + \dfrac{D}{2A}\right)^2 = \dfrac{C^2 + D^2 - 4AE}{4A^2}$ $\quad S\left(\dfrac{-C}{2A}; \dfrac{-D}{2A}\right)$; $r = \sqrt{\dfrac{C^2 + D^2 - 4AE}{4A^2}} = \dfrac{\sqrt{C^2 + D^2 - 4AE}}{2A}$

k: $x = r.\cos\varphi$; $y = r.\sin\varphi$ $\quad \varphi \in \langle 0; 2\pi)$

t: $(x_0 - u).(x - u) + (y_0 - v).(y - v) = r^2$ $\quad T(x_0; y_0)$

Elipsa

$\mathscr{E}$: $(S(u; v); a; b)$ $\quad e^2 = a^2 - b^2$

Kanonický tvar stredovej rovnice $\mathscr{E}$: $\dfrac{(x-u)^2}{a^2} + \dfrac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ $\quad AB \parallel x$

$A(u - a; v)$ $\quad C(u; v + b)$ $\quad F_1(u - e; v)$

B($u + a$; v) D(u ; $v - b$) $F_2(u + e; v)$

t: $\frac{(x_0-u).(x-u)}{a^2} + \frac{(y_0-v).(y-v)}{b^2} = 1$ $T(x_0; y_0)$

Kanonický tvar stredovej rovnice $\mathscr{E}$: $\frac{(y-v)^2}{a^2} + \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ y

A(u; $v - a$) C($u - b$; v) $F_1(u; v - e)$

B(u; $v + a$) D($u + b$; v) $F_2(u; v + e)$

t: $\frac{(y_0-v).(y-v)}{a^2} + \frac{(x_0-u).(x-u)}{b^2} = 1$ $T(x_0; y_0)$

Všeobecná rovnica $\mathscr{E}$: $A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$

$A; B; C; D; E \in \mathbb{R} \wedge A.B > 0 \wedge A \neq B \wedge BC^2 + AD^2 - 4ABE > 0$

$\mathscr{E}$: $\frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4A^2B}} + \frac{\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2}{\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4AB^2}} = 1$ $S\left(\frac{-C}{2A}; \frac{-D}{2B}\right)$; $a = \sqrt{\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4A^2B}}$; $b = \sqrt{\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4AB^2}}$

$\mathscr{E}$: $x = a.\cos\varphi$; $y = b.\sin\varphi$ $\varphi \in \langle 0; 2\pi)$

Hyperbola

$\mathscr{H}$: (S(u; v); a; b) $e^2 = a^2 + b^2$

Kanonický tvar stredovej rovnice $\mathscr{H}$: $\frac{(x-u)^2}{a^2} - \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ x

A($u - a$; v) C(u ; $v + b$) $F_1(u - e; v)$

B($u + a$; v) D(u ; $v - b$) $F_2(u + e; v)$

a_1: $b.(x - u) + a.(y - v) = 0$ a_2: $b.(x - u) - a.(y - v) = 0$

a_1: $y = -\frac{b}{a}(x - u) + v$ a_2: $y = \frac{b}{a}(x - u) + v$

t: $\frac{(x_0-u).(x-u)}{a^2} - \frac{(y_0-v).(y-v)}{b^2} = 1$ $T(x_0; y_0)$

Kanonický tvar stredovej rovnice $\mathscr{H}$: $\frac{(y-v)^2}{a^2} - \frac{(x-u)^2}{b^2} = 1$ AB ∥ y

A(u; $v - a$) C($u - b$; v) $F_1(u; v - e)$

B(u; $v + a$) D($u + b$; v) $F_2(u; v + e)$

a_1: $a.(x - u) - b.(y - v) = 0$ a_2: $a.(x - u) + b.(y - v) = 0$

a_1: $y = \frac{a}{b}(x - u) + v$ a_2: $y = -\frac{a}{b}(x - u) + v$

t: $\frac{(y_0-v).(y-v)}{a^2} - \frac{(x_0-u).(x-u)}{b^2} = 1$ $T(x_0; y_0)$

Všeobecná rovnica $\mathscr{H}$: $A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$

$A; B; C; D; E \in \mathbb{R} \wedge A.B < 0 \wedge BC^2 + AD^2 - 4ABE \neq 0$

$\mathscr{H}$: $\frac{\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2}{\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4A^2B}} + \frac{\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2}{\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4AB^2}} = 1$ $S\left(\frac{-C}{2A}; \frac{-D}{2B}\right)$; $a = \sqrt{\left|\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4A^2B}\right|}$; $b = \sqrt{\left|\frac{BC^2+AD^2-4ABE}{4AB^2}\right|}$

$\mathscr{H}$: $x = \frac{a}{\cos\varphi}$; $y = b.\mathrm{tg}\,\varphi$ $\varphi \in \langle 0; 2\pi) \wedge \varphi \neq \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$

Parabola

$\wp$: (V(u; v); p)

Vrcholová rovnica $\wp$: $(x - u)^2 = \pm 2p(y - v)$ $o \parallel y$

$F\left(u; v \pm \frac{p}{2}\right)$ d: $y = v \mp \frac{p}{2}$

t: $(x_0 - u).(x - u) = \pm 2p[(y - v) + (y_0 - v)]$ T(x_0; y_0)

Vrcholová rovnica $\wp$: $(y - v)^2 = \pm 2p(x - u)$ $o \parallel x$

$F\left(u \pm \frac{p}{2}; v\right)$ d: $x = u \mp \frac{p}{2}$

t: $(y_0 - v).(y - v) = \pm 2p[(x - u) + (x_0 - u)]$ T(x_0; y_0)

Všeobecná rovnica $\wp$: $A.x^2 + B.y^2 + C.x + D.y + E = 0$

$A; B; C; D; E \in \mathbb{R} \wedge A.B = 0 \wedge A + B \neq 0$

$\wp$: $\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 = -\frac{D}{A}\left(y + \frac{4AE - C^2}{4AD}\right)$ $V\left(\frac{-C}{2A}; \frac{C^2 - 4AE}{4AD}\right)$; $p = \left|-\frac{D}{2A}\right|$ alebo

$\wp$: $\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = -\frac{C}{B}\left(x + \frac{4BE - D^2}{4BC}\right)$ $V\left(\frac{D^2 - 4BE}{4BC}; \frac{-D}{2B}\right)$; $p = \left|-\frac{C}{2B}\right|$

$\wp$: $x = pt^2 + u$, $y = 2pt + v$ $\wp$: $x = 2pt + u$, $y = pt^2 + v$

Ohniskové (fokálne) rovnice

$e_n = \frac{e}{a}$ numerická excentricita

$p = \frac{b^2}{a}$ parameter kužeľosečky

$\xi^2 + \psi^2 = (e_n\xi + p)^2$ súradnicová sústava F(ξ; ψ)

$0 < e_n < 1 \Rightarrow \mathcal{E}$; $e_n = 1 \Rightarrow \wp$; $1 < e_n \Rightarrow \mathcal{H}$

Rovnice v polárnej súradnicovej sústave

$\mathcal{E}$: $r = \frac{p}{1 - e_n.\cos\varphi}$ súradnicová sústava F(r; φ)

$\mathcal{H}$: $r = \frac{p}{\pm 1 - e_n.\cos\varphi}$ $\wp$: $r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$

Plochy druhého rádu (kvadratické plochy)

$a_{11}.x^2 + a_{22}.y^2 + a_{33}.z^2 + 2a_{12}.xy + 2a_{23}.yz + 2a_{31}.zx + 2a_{14}.x + 2a_{24}.y + 2a_{34}.z + a_{44} = 0$

$\xi = \frac{x^2}{a^2}$; $\psi = \frac{y^2}{b^2}$; $\zeta = \frac{z^2}{c^2}$

Elipsoid	$\xi + \psi + \zeta = 1$	Dvojdielny hyperboloid	$\xi + \psi - \zeta = -1$
Imaginárny elipsoid	$\xi + \psi + \zeta = -1$	Jednodielny hyperboloid	$\xi + \psi - \zeta = 1$
Imaginárny kužeľ	$\xi + \psi + \zeta = 0$	Kužeľová plocha	$\xi + \psi - \zeta = 0$
Eliptický paraboloid	$\xi + \psi = \pm z$	Hyperbolický paraboloid	$\xi - \psi = \pm z$

Eliptická valcová plocha $\xi + \psi = 1$	Hyperbolická valcová plocha $\xi - \psi = 1$	Parabolická valcová plocha $y^2 = 2px$

Matice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ matica typu $m \times n$ $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$ matica rádu 3 je štvorcová typu 3 × 3

$\mathbf{R} = [r_1 \quad r_2 \quad \dots \quad r_n]$ riadková matica (riadkový vektor)

$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}$ stĺpcová matica (stĺpcový vektor)

$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nulová matica

$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}$ diagonálna matica

$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ jednotková matica

$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ permutačná matica

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$ transponovaná matica

$\mathbf{A}.\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}.\mathbf{A} = \mathbf{E}$ inverzná matica

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{bmatrix}^T$

$h(\mathbf{A}) \coloneqq \dim \langle\{S_1; \dots ; S_n\}\rangle = \dim \langle\{R_1; \dots ; R_m\}\rangle$ hodnosť matice **A**

Operácie s maticami

$$\lambda.\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

$\lambda.\mathbf{A} = \mathbf{A}.\lambda$ $(\lambda + \mu).\mathbf{A} = \lambda.\mathbf{A} + \mu.\mathbf{A}$

$\lambda.(\mu.\mathbf{A}) = (\lambda\mu).\mathbf{A}$ $\lambda.(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda.\mathbf{A} + \lambda.\mathbf{B}$

$\mathbf{A}_{m \times n}.\mathbf{B}_{n \times p} = \mathbf{C}_{m \times p}$

$$c_{i,j} = a_{i,1}.b_{1,j} + a_{i,2}.b_{2,j} + a_{i,3}.b_{3,j} + \dots + a_{i,n}.b_{n,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}.b_{11}+a_{12}.b_{21} & a_{11}.b_{12}+a_{12}.b_{22} & a_{11}.b_{13}+a_{12}.b_{23} & a_{11}.b_{14}+a_{12}.b_{24} \\ a_{21}.b_{11}+a_{22}.b_{21} & a_{21}.b_{12}+a_{22}.b_{22} & a_{21}.b_{13}+a_{22}.b_{23} & a_{21}.b_{14}+a_{22}.b_{24} \\ a_{31}.b_{11}+a_{32}.b_{21} & a_{31}.b_{12}+a_{32}.b_{22} & a_{31}.b_{13}+a_{32}.b_{23} & a_{31}.b_{14}+a_{32}.b_{24} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{A}.(\mathbf{B}.\mathbf{C}) = (\mathbf{A}.\mathbf{B}).\mathbf{C}$ $(\mathbf{A} + \mathbf{B}).\mathbf{C} = \mathbf{A}.\mathbf{C} + \mathbf{B}.\mathbf{C}$

$\mathbf{C}.(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C}.\mathbf{A} + \mathbf{C}.\mathbf{B}$ $\mathbf{A}.\mathbf{B} \neq \mathbf{B}.\mathbf{A}$ väčšinou, ale $\exists$ $\mathbf{A}.\mathbf{B} = \mathbf{B}.\mathbf{A}$

Matice transformácií

V rovine

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$ B′ = **M**.B

$$\begin{bmatrix} d_x \\ d_y \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ posúvanie $\vec{d} = (d_x; d_y)$

$$\begin{bmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ vodorovné skosenie s koeficientom ξ (v smere x-ovej osi)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \psi & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ zvislé skosenie s koeficientom ψ (v smere y-ovej osi)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ osová súmernosť podľa osi *x*

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ osová súmernosť podľa osi *y*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ osová súmernosť podľa priamky $y = x$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ stredová súmernosť podľa *O*

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ otáčanie okolo *O* o uhol φ

$$\begin{bmatrix} \xi & 0 \\ 0 & \psi \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ zmena mierky s koeficientmi ξ a ψ

ak ξ = ψ, potom rovnoľahlosť so stredom v *O*

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ stlačenie s koeficientom λ

V priestore

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$ B′ = **M**.B

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ posúvanie $\vec{d} = (d_x; d_y; d_z)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ otáčanie okolo osi *x* o uhol φ

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ otáčanie okolo osi *y* o uhol φ

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ otáčanie okolo osi z o uhol φ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ rovinová súmernosť podľa roviny (x, y)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ rovinová súmernosť podľa roviny (y, z)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ rovinová súmernosť podľa roviny (z, x)

$$\begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ zmena mierky s koeficientmi ξ, ψ a ζ

ak ξ = ψ = ζ, potom rovnoľahlosť so stredom v O

Determinant

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \times & a_{12} \\ a_{21} & & a_{22} \end{vmatrix}^{\nearrow -}_{\searrow +} = a_{11}.a_{22} - a_{21}.a_{12}$$ determinant druhého rádu

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$$

$$D = \det \mathbf{A} = \Delta = |a_{ik}| = \sum_{\pi} (-1)^{i(\pi)} a_{1i_1}.a_{2i_2}.a_{3i_3} \dots a_{ni_n} \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$$

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \dots & a_{i-1,k-1} & a_{i-1,k+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \dots & a_{i+1,k-1} & a_{i+1,k+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ subdeterminant (minor) k prvku a_{ik}

$A^{\pm}_{ik} = (-1)^{i+k}. A_{ik}$ algebraický doplnok (kofaktor) k prvku a_{ik}

$$D = a_{i1}.A^{\pm}_{i1} + a_{i2}.A^{\pm}_{i2} + \dots + a_{in}.A^{\pm}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.A^{\pm}_{ik}$$

$$D = a_{1k}.A^{\pm}_{1k} + a_{2k}.A^{\pm}_{2k} + \dots + a_{nk}.A^{\pm}_{nk} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}.A^{\pm}_{ik}$$ *Laplace*ova veta o rozvoji determinantu

Riešenie sústavy rovníc – *Cramer*ovo pravidlo

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}.x_1 & + & a_{12}.x_2 & + & a_{13}.x_3 & \dots & a_{1n}.x_n & = & b_1 \\ a_{21}.x_1 & + & a_{22}.x_2 & + & a_{23}.x_3 & \dots & a_{2n}.x_n & = & b_2 \\ a_{31}.x_1 & + & a_{32}.x_2 & + & a_{33}.x_3 & \dots & a_{3n}.x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}.x_1 & + & a_{n2}.x_2 & + & a_{n3}.x_3 & \dots & a_{nn}.x_n & = & b_n \end{array}$$

$$\mathbf{A}_{n\times n}.\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{B}_{n\times 1}$$

$$\mathrm{D}_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k-1} & b_2 & a_{2k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ ekkor $x_k = \frac{D_k}{D}$

Riešenie sústavy rovníc – pomocou inverznej matice

$\mathbf{X}_{n\times 1} = \mathbf{A}^{-1}_{n\times n}.\mathbf{B}_{n\times 1}$ stĺpcovú maticu pravej strany vynásobíme zľava s inverznou maticou sústavy (ak existuje)

Kombinatorika

$n! \coloneqq n.(n-1).(n-2).\dots.3.2.1$ $\qquad 0! \coloneqq 1$

$n! \approx \sqrt{2\pi n}.\left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\qquad$ *Stirling*ova aproximácia

$n!! \coloneqq n.(n-2).(n-4).(n-6).\dots.2\ /\ .1$ $\qquad 0!! \coloneqq 1;\ 1!! \coloneqq 1$

Variácie

$\mathrm{V}_{n,k} = \mathrm{V}_k(n) = \mathrm{V}_n^k = n.(n-1).(n-2).\dots.(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

$\mathrm{V}'_{n,k} = \mathrm{V}'_k(n) = \mathrm{V}_n^{k(i)} = n^k$

Permutácie

$\mathrm{V}_n(n) = \mathrm{P}_n = \mathrm{P}(n) = n!$

$\mathrm{P}_n^{k_1;k_2;\dots;k_s} = \frac{n!}{k_1!.k_2!.\dots.k_s!}$ $\qquad (k_1 + k_2 + \dots + k_s = n)$

Kombinácie

$\mathrm{C}_{n,k} = \mathrm{C}_k(n) = \mathrm{C}_n^k = \binom{n}{k} = \frac{\mathrm{V}_k(n)}{\mathrm{P}(k)} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$

$\mathrm{C}'_{n,k} = \mathrm{C}'_k(n) = \mathrm{C}_n^{k(i)} = \binom{n+k-1}{k}$

Binomické koeficienty (kombinačné čísla)

$\binom{n}{0} = 1$ $\qquad \binom{n}{n} = 1$

$\binom{n}{1} = n$ $\qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \dots + \binom{n+k-1}{k-1} + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

$$\binom{n}{0}.\binom{m}{k} + \binom{n}{1}.\binom{m}{k-1} + \binom{n}{2}.\binom{m}{k-2} + \dots + \binom{n}{k-1}.\binom{m}{1} + \binom{n}{k}.\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \dots + \binom{n}{n-1}^2 + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

Teória pravdepodobnosti

Algebra javov

A; B; C ∈ Ω $\qquad$ Ω – množina elementárnych náhodných javov (istý jav)

Ø $\qquad$ nemožný jav

$A \cup B$	zjednotenie javov
$A \cap B$	prienik javov (súčasné nastanie)
$A \cap B = \emptyset$	nezlučiteľné (disjunktné) javy
$\bar{A} = \Omega \setminus A$	opačný (doplnkový) jav
$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega \wedge \forall\, i \neq k: A_i \cap A_k = \emptyset$	úplný systém javov
$\cap;\ \cup$	komutatívne; asociatívne; distributívne
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B};\ \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$	*De Morgan*ove formuly

$\Omega \in \mathcal{A};\ \emptyset \in \mathcal{A}$

$A_1 \in \mathcal{A} \wedge A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

$A_1; A_2; \ldots; A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

Pravdepodobnosť

Axiómy (Kolmogorov)

1. $\forall A \in \mathcal{A}: 0 \leq P(A) \leq 1$
2. $\forall A; B \in \mathcal{A}: A = B \Rightarrow P(A) = P(B)$
3. $\forall A_1; A_2; \ldots; A_n \in \mathcal{A}: \forall i \neq j: A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow\ P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
4. $P(\emptyset) = 0$ a $P(\Omega) = 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$	pravdepodobnosť opačného javu
$P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$	podmienená pravdepodobnosť
$P(A\|B) = P(A) \vee P(B\|A) = P(B)$	nezávislé javy
$P(x) = \binom{n}{x} p^x . (1-p)^{n-x}$	nezávislé pokusy

Štatistika

$\hat{x}$	modus – najčastejšia hodnota (ak existuje)
$\tilde{x}$	medián – prostredná hodnota
$D^2(\xi) = \sigma^2 = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	rozptyl (variancia, stredná kvadratická odchýlka)
$D(\xi) = \sigma = s = \sqrt{D^2(\xi)} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$	smerodajná odchýlka
$s^2 = \sigma_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	výberový rozptyl
$\sigma^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right)$	rozptyl počítaný kalkulačkou

Postupnosti

Aritmetická postupnosť

$\forall n \in \mathbb{N}$: $d = a_{n+1} - a_n$

$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$

$a_n = a_1 + (n-1).d$

$a_n = a_r + (n-r).d$

$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2}.n$

Geometrická postupnosť

$\forall n \in \mathbb{N}$: $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$a_{n+1} = \sqrt{a_n . a_{n+2}}$

$a_n = a_1.q^{n-1}$

$a_n = a_r.q^{n-r}$

$s_n = a_1.\frac{q^n - 1}{q-1}$

Fibonacciho postupnosť

$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; $F_1 = F_2 = 1$ — rekurentne daná

$x^2 - x - 1 = 0$ — charakteristická rovnica

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$ — všeobecný tvar – Binetov vzorec

Úroky

z základný kapitál alebo výška úveru

n — splatnosť – počet mesiacov

c — kapitál na konci splatnosti – cieľová suma

s_m — mesačná splátka

v — mesačný vklad

p_{rok} — ročná úroková sadzba v %

$q_{rok} = 1 + \frac{p_{rok}}{100}$ — ročný úrokovací faktor

$q = \sqrt[12]{1 + \frac{p_{rok}}{100}} = \sqrt[12]{q_{rok}}$ — mesačný úrokovací faktor

$q_{deň} = \sqrt[365]{1 + \frac{p_{rok}}{100}} = \sqrt[365]{q_{rok}}$ — denný úrokovací faktor

Úrok jednorázového vkladu

$c = z.q^n$ — hodnota jednorázového vkladu z po n mesiacoch zúročenia

Efektívny výnos (zložitý úrok)

$c = z.q^n + v.\frac{q^n - 1}{q-1}$ — hodnota vkladu z (začiatkom mesiaca) zvýšeného mesačne o sumu v (na konci mesiaca) po n mesiacoch zúročenia

$s_m = z.q^n.\frac{q-1}{q^n - 1}$ — mesačná splátka úveru z splateného za n mesiacov

$c = n.s_m = n.z.q^n.\frac{q-1}{q^n-1}$ — reálne vrátená suma za úver z

$p = \frac{c}{100.z} = \frac{n.q^n}{100}.\frac{q-1}{q^n-1}$ — reálny úrok úveru v %

$n = \frac{\log\frac{s_m}{s_m + z - z.q}}{\log q}$ — dĺžka splatenia úveru s mesačnou splátkou s_m

Rady

Nekonečný geometrický rad: $0 \le |q| < 1$ — $s = \frac{a_1}{1-q}$

Súčet nekonečných radov

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$
2. $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n} \pm \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\frac{(x-1)^i}{i}$
3. $\ln x = \frac{x-1}{x} + \frac{(x-1)^2}{2x^2} + \frac{(x-1)^3}{3x^3} + \frac{(x-1)^4}{4x^4} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{nx^n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(x-1)^i}{ix^i}$
4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i+1}}{(2i+1)!}$
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i x^{2i}}{(2i)!}$
6. $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$
7. $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{(2i)!}$
8. $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e$
9. $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!} \pm \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e}$
10. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} \pm \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln 2$
11. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$
12. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{2^n} \pm \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2^i} = \frac{2}{3}$
13. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} \pm \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2i-1} = \frac{\pi}{4}$
14. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$
15. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{1}{2}$
16. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)(i+1)} = \frac{3}{4}$
17. $\frac{1}{3.5} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{11.13} + \frac{1}{15.17} + \cdots + \frac{1}{(4n-1)(4n+1)} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4i-1)(4i+1)} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$
18. $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{4.5.6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)(i+2)} = \frac{1}{4}$
19. $\frac{1}{1.2.....l} + \frac{1}{2.3.....(l+1)} + \frac{1}{3.4.....(l+2)} + \frac{1}{4.5.....(l+3)} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1).....(n+l-1)} + \cdots =$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1).\ldots.(i+l-1)}=\frac{1}{(l-1).(l-1)!}$$

20. $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}=\frac{\pi^2}{6}$

21. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\pm\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i^2}=\frac{\pi^2}{12}$

22. $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

23. $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^4}=\frac{\pi^4}{90}$

24. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^4}\pm\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{i^4}=\frac{7\pi^4}{720}$

25. $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^4}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(2i+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$

Súčet konečných radov

1. $1+2+3+4+\ldots+n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$
2. $p+(p+1)+(p+2)+(p+3)+\ldots+(p+n)=\sum_{i=p}^{p+n} i=\frac{(n+1)(2p+n)}{2}$
3. $1+3+5+7+\ldots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$
4. $2+4+6+8+\ldots+2n=\sum_{i=1}^{n}2i=n(n+1)$
5. $1.2+2.3+3.4+\ldots+n.(n+1)=\sum_{i=1}^{n}i(i+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
6. $1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+n.(n+1).(n+2)=\sum_{i=1}^{n}i(i+1)(i+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$
7. $1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
8. $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}i^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$
9. $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
10. $1^2+3^2+5^2+7^2+\ldots+(2n-1)^2=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2=\frac{n(4n^2-1)}{3}$
11. $1^3+3^3+5^3+7^3+\ldots+(2n-1)^3=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3=n^2(2n^2-1)$

12. $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \ldots + n^4 = \sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

13. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

14. $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{n}{2n+1}$

15. $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$

16. $1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \frac{3}{4!} - \cdots - \frac{n-1}{n!} = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{(i+1)!} = \frac{1}{n!}$

Diferenciálny počet

Limita funkcie

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \mathrm{A}$; $\lim_{x\to x_0} g(x) = \mathrm{B}$ $\qquad c \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ $\qquad \lim_{x\to x_0} c.f(x) = c.\mathrm{A}$

$\lim_{x\to x_0} f(x).g(x) = \mathrm{A.B}$ $\qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\qquad$ *l'Hospital*ovo pravidlo

Význačné limity

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ $\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Derivácia

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$\forall x = x_0$: $\exists f'(x)$; $g'(x)$; $c \in \mathbb{R}$

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ $\qquad (c.f)'(x) = c.f'(x)$

$(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ $\qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$

$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$ $\qquad (f \circ g)'(x) = \{f[g(x)]\}' = f'[g(x)].g'(x)$

Derivácie elementárnych funkcií

1. $(c)' = 0$
2. $(x^n)' = n.x^{n-1}$ $\qquad \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
3. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n.\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
4. $(e^x)' = e^x$ $\qquad (a^x)' = a^x.\ln a$
5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad (\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$
6. $(\sin x)' = \cos x$ $\qquad (\cos x)' = -\sin x$
7. $(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad (\mathrm{cotg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arc\,cotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$
10. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
11. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
12. $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
13. $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$	$(\operatorname{arcth} x)' = -\frac{1}{1-x^2}$

Priebeh funkcie

V. Nech $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, ale $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Funkcia $f(x)$ vtedy má extrém v bode x_0, ak n je párne číslo. Vtedy má v bode x_0 lokálne:
minimum, ak $f^{(n)}(x_0) > 0$;
maximum, ak $f^{(n)}(x_0) < 0$.

krivka je konvexná – dotyčnica je pod krivkou (pr. $f(x) = x^2$)
krivka je konkávna – dotyčnica je nad krivkou (pr. $g(x) = -x^2$)
$f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ konvexná na intervale
$f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ konkávna na intervale

V. $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$; potom funkcia f má v bode x_0 inflexný bod.

***Taylor*ova formula**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}$$

Integrovanie

$\int c.f(x)dx = c.\int f(x)dx$	$\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
metóda integrovania per partes	$\int f'(x).g(x)dx = f(x).g(x) - \int f(x).g'(x)dx$
substitučná metóda	$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big).g'(t)dt$
*Newton*ov–*Leibniz*ov vzorec	$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$
$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Neurčitý integrál elementárnych funkcií

1. $\int 0\,dx = c$	$\int c\,dx = c.x + d$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$
3. $\int e^x dx = e^x + c$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
4. $\int \ln x\,dx = x.\ln x - x + c$	$\int \log_a x\,dx = x.\log_a x - \frac{x}{\ln a} + c$
5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$	$\int \cos x\,dx = \sin x + c$
6. $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \operatorname{cotg} x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$
7. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x + c$
8. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$	$\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$
9. $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x + c$	$\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln\lvert\operatorname{sh} x\rvert + c$
10. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}dx = \operatorname{th} x + c$	$\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}dx = -\operatorname{cth} x + c$
11. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + c$	

12. $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \begin{cases} \frac{1}{a}\operatorname{arth}\frac{x}{a}+c \\ \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c \end{cases}$ $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \begin{cases} -\frac{1}{a}\operatorname{arcth}\frac{x}{a}+c \\ \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+c \end{cases}$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = arc\sin\frac{x}{a}+\mathrm{c}$

14. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = \begin{cases} \operatorname{arsh}\frac{x}{a}+c \\ \ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+c \end{cases}$ $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \begin{cases} \operatorname{arch}\frac{x}{a}+c \\ \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c \end{cases}$

Aplikácie určitého integrálu

Dĺžka krivky	$s=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$	Výpočet obsahu	$S=\int_a^b f_1(x)-f_2(x)dx$
Objem rotačného telesa	$V=\pi.\int_a^b f^2(x)dx$	Povrch rotačného telesa	$S=2\pi.\int_a^b f(x).\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$

Písmená gréckej, gótskej a ruskej abecedy

Α α	*Α α*	alfa
Β β	*Β β*	beta
Γ γ	*Γ γ*	gama
Δ δ	*Δ δ*	delta
Ε ε	*Ε ε*	epsilon
Ζ ζ	*Ζ ζ*	zéta
Η η	*Η η*	éta
Θ θ	*Θ ϑ*	théta
Ι ι	*Ι ι*	jota
Κ κ	*Κ κ*	kapa
Λ λ	*Λ λ*	lambda
Μ μ	*Μ μ*	mí
Ν ν	*Ν ν*	ní
Ξ ξ	*Ξ ξ*	ksí
Ο ο	*Ο ο*	omikron
Π π	*Π π*	pí
Ρ ρ	*Ρ ρ*	ró
Σ σ	*Σ σ*	sigma
Τ τ	*Τ τ*	tau
Υ υ	*ϒ υ*	ypsilon
Φ φ	*Φ φ*	fí
Χ χ	*Χ χ*	chí
Ψ ψ	*Ψ ψ*	psí
Ω ω	*Ω ω*	omega
∂	*∂*	delta
ς		sigma

𝕬 𝖆	𝔄 𝔞	a
𝕭 𝖇	𝔅 𝔟	b
𝕮 𝖈	ℭ 𝔠	c
𝕯 𝖉	𝔇 𝔡	d
𝕰 𝖊	𝔈 𝔢	e
𝕱 𝖋	𝔉 𝔣	f
𝕲 𝖌	𝔊 𝔤	g
𝕳 𝖍	ℌ 𝔥	h
𝕴 𝖎	ℑ 𝔦	i
𝕵 𝖏	𝔍 𝔧	jott
𝕶 𝖐	𝔎 𝔨	k
𝕷 𝖑	𝔏 𝔩	l
𝕸 𝖒	𝔐 𝔪	m
𝕹 𝖓	𝔑 𝔫	n
𝕺 𝖔	𝔒 𝔬	o
𝕻 𝖕	𝔓 𝔭	p
𝕼 𝖖	𝔔 𝔮	q
𝕽 𝖗	ℜ 𝔯	r
𝕾 𝖘	𝔖 ſ	s
𝕿 𝖙	𝔗 𝔱	t
𝖀 𝖚	𝔘 𝔲	u
𝖁 𝖛	𝔙 𝔳	v (fau)
𝖂 𝖜	𝔚 𝔴	w
𝖃 𝖝	𝔛 𝔵	x
𝖄 𝖞	𝔜 𝔶	y
𝖅 𝖟	ℨ 𝔷	z

А а	*А а*	a
Б б	*Б б*	b
В в	*В в*	v
Г г	*Г г*	g
Д д	*Д д*	d
Е е	*Е е*	je
Ё ё	*Ё ё*	jo
Ж ж	*Ж ж*	ž
З з	*З з*	z
И и	*И и*	i
Й й	*Й й*	j
К к	*К к*	k
Л л	*Л л*	l
М м	*М м*	m
Н н	*Н н*	n
О о	*О о*	o
П п	*П п*	p
Р р	*Р р*	r
С с	*С с*	s
Т т	*Т т*	t
У у	*У у*	u
Ф ф	*Ф ф*	f
Х х	*Х х*	ch
Ц ц	*Ц ц*	c
Ч ч	*Ч ч*	č
Ш ш	*Ш ш*	š
Щ щ	*Щ щ*	šč
Ъ ъ	*Ъ ъ*	tvrdý znak
Ы ы	*Ы ы*	i
Ь ь	*Ь ь*	mäkký znak
Э э	*Э э*	e
Ю ю	*Ю ю*	ju
Я я	*Я я*	ja

Fyzikálne konštanty

$c = 299\,792\,458\ \frac{m}{s}$	rýchlosť svetla vo vákuu
$\varepsilon_0 = 8{,}854\,187\,817.10^{-12}\ \frac{F}{m}$	permitivita vákua
$\mu_0 = 1{,}256\,637\,061.10^{-6}\ \frac{N}{A^2}$	permeabilita vákua
$G = 6{,}674\,28.10^{-11}\ \frac{N.m^2}{kg^2}$	gravitačná konštanta
$h = 6{,}626\,068\,96.10^{-34}\ J.s$	Planckova konštanta
$\hbar = 1{,}054\,571\,628.10^{-34}\ J.s$	redukovaná Planckova konštanta (Dirac)
$g_n = 9{,}806\,65\ \frac{m}{s^2}$	normálne tiažové zrýchlenie
$atm = 101\,325\ Pa$	normálny tlak vzduchu
$N_A = 6{,}022\,141\,5.10^{23}\ \frac{1}{mol}$	Avogadrova konštanta
$R = 8{,}314\,472\ \frac{dm^3}{mol}$	univerzálna plynová konštanta
$V_m = 22{,}413\,994\,8.10^{-2}\ \frac{dm^3}{mol}$	molová plynová konštanta
$m_u = 1{,}660\,538\,86.10^{-27}\ kg$	hmotnostná jednotka (1 u)
$m_p = 1{,}672\,621\,637.10^{-27}\ kg$	hmotnosť protónu
$m_n = 1{,}674\,927\,16.10^{-27}\ kg$	hmotnosť neutrónu
$m_e = 9{,}109\,382\,15.10^{-34}\ kg$	hmotnosť elektrónu
$\frac{m_p}{m_e} = 1836{,}152\,667$	pomer hmotnosti protónu a elektrónu
$r_e = 2{,}817\,940\,299.10^{-15}\ m$	polomer elektrónu
$e = 1{,}602\,176\,487.10^{-19}\ C$	elementárny náboj (náboj elektrónu)
$F = 96\,485{,}337\,716\,389\ \frac{C}{mol}$	Faradayova konštanta
$\kappa = 8{,}987\,551\,787.10^{9}\ \frac{N.m^2}{C^2}$	Coulombova konštanta
$k = 1{,}380\,650\,388.10^{-23}\ \frac{J}{K}$	Boltzmannova konštanta
$R_\infty = 10\,973\,731{,}568\,525\ \frac{1}{m}$	Rydbergova konštanta

Predpony sústavy SI

± 3	± 6	± 9	± 12	± 15	± 18	± 21	± 24
kilo- (k)	mega- (M)	giga- (G)	tera- (T)	peta- (P)	exa- (E)	zetta- (Z)	yotta- (Y)
milli- (m)	mikro- (μ)	nano- (n)	piko- (p)	femto- (f)	atto- (a)	zepto- (z)	yocto- (y)

deka- (da) – 10^1, hekto- (h) – 10^2

deci- (d) – 10^{-1}, centi- (c) – 10^{-2}