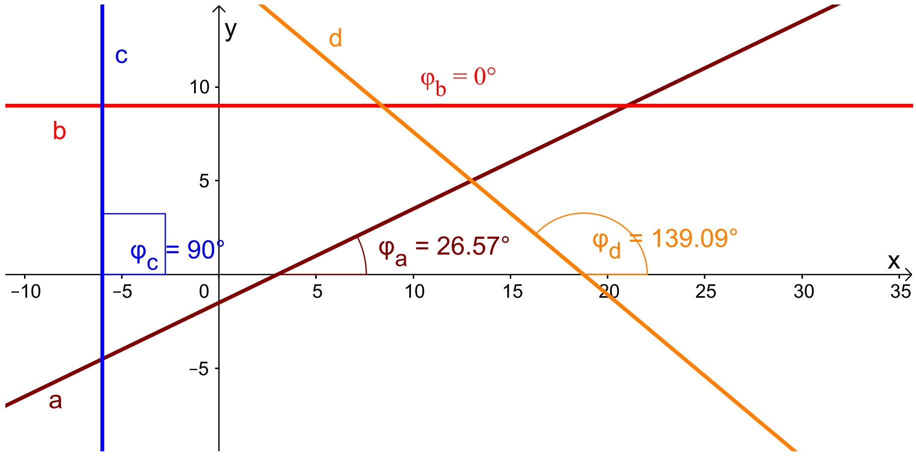
Az egyenes iránytényezős egyenlete
(Smernicová rovnica priamky)

Minden olyan egyenes, mely nem párhuzamos az x tengellyel, valamilyen szöget zár be ezen tengellyel. Azt az irányított szöget, melyet az x tengely pozitív irányával zár be az egyenes, nevezzük ***az egyenes irányszögének*** (smerový uhol priamky) – $\varphi \in \langle 0°; 180°)$. Ha az egyenes párhuzamos az x tengellyel, akkor az értéke nulla. Az irányszög tangense (ha létezik) pedig ***az egyenes iránytényezője – k***. Egyedül az y tengellyel párhuzamos egyeneseknek nincs iránytényezője – a 90°-os szögnek nincs tangense.



$k_a = \text{tg}\ \varphi_a = \text{tg}\ 26{,}57° \doteq 0{,}500$ $\quad$ $k_b = \text{tg}\ \varphi_b = \text{tg}\ 0° = 0$

$k_c = \text{tg}\ \varphi_c = \text{tg}\ 90° \quad \nexists$ $\quad$ $k_d = \text{tg}\ \varphi_d = \text{tg}\ 139{,}09 = -0{,}867$

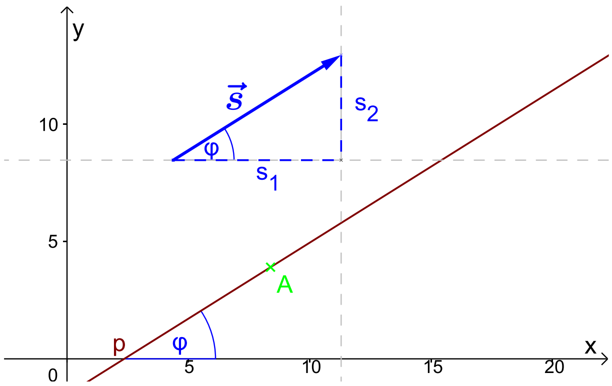
M. A hegyesszögek tanges értékei – ezzel egyben az iránytényezői – pozitív számok, a tompaszögeké pedig negatív.

Ahhoz, hogy felírhassuk egy egyenes iránytényezős egyenletét, ismernünk kell az egyenes irányvektorát és az egyenes egy pontját.

Adott a p egyenes $\overrightarrow{s_p}$ irányvektorával és A pontjával:

$\overrightarrow{s_p}\ (s_1; s_2)$, $A(x_0; y_0)$

Az egyenes irányvektorából meg tudjuk határozni az iránytényezőt (az irányvektor párhuzamos az egyenessel → a szög tangensét megkapjuk a szemközti és a szög melletti befogó hányadosaként):



$$k_p = \frac{s_2}{s_1} = -\frac{n_1}{n_2}$$

A p egyenes iránytényezős egyenlete az alábbi alakot ölti:

$p\colon y = k_p.x + b \qquad b \in \mathbb{R}$

ahol a b konstans értékét az egyenes egy ismert pontjának behelyettesítésével számoljuk ki

$b = y_0 - k_p.x_0$

M. Az egyenes iránytényezős egyenlete pontosan olyan alakkal rendelkezik, mint a lineáris függvény.

példa:

Adott egy egyenes $\vec{s}$ irányvektorával és egy pontjával. Írjuk fel az egyenes iránytényezős egyenletét!

a, a: $\overrightarrow{s_a} = (2; -3)$; A = (5; 1) $\quad$ b, b: $\overrightarrow{s_b} = (3; 7)$; B = (-1; -3)

c, c: $\overrightarrow{s_c} = (-4; 2)$; C = (4; 0) $\quad$ d, d: $\overrightarrow{s_d} = (1; 0)$; D = (6; -2) kiszámoljuk az iránytényezőt az irányvektor koordinátáiból

$k_a = \frac{-3}{2}$

felírjuk az iránytényezős egyenlet előzetes alakját

a: $y = -\frac{3}{2}.x + b$

a hiányzó konstans értékét az adott pont behelyettesítésével számoljuk ki

$1 = -\frac{3}{2}.5 + b$

$1 = -\frac{15}{2} + b \qquad /+ \frac{15}{2}$

$\frac{17}{2} = b$

a: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{17}{2}$

$k_b = \frac{7}{3}$

b: $y = \frac{7}{3}.x + b$

$-3 = \frac{7}{3}.(-1) + b$

$-3 = -\frac{7}{3} + b \qquad /+ \frac{7}{3}$

$-\frac{2}{3} = b$

b: $y = \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}$

$k_c = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

c: $y = -\frac{1}{2}.x + b$

$0 = -\frac{1}{2}.4 + b$

$0 = -2 + b \qquad /+ 2$

$2 = b$

c: $y = -\frac{1}{2}x + 2$

$k_d = \frac{0}{1} = 0$

d: $y = 0.x + b$

$-2 = 0.6 + b$

$-2 = -0 + b$

$-2 = b$

d: $y = -2$

Adott egy egyenes két pontjával. Írjuk fel az iránytényezős egyenletét!

a, a: A(5; -3), B(7; 4)

b, b: C(-1; -6), D(3; 4)

c, c: E(11; 8), F(2; -1)

d, d: G(-2; 4), H(-4; -6)

$\vec{s_a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (2; 7)$

$k_a = \frac{7}{2}$

felírjuk az iránytényezős egyenlet előzetes alakját

a: $y = \frac{7}{2}.x + b$

behelyettesítjük a két adott pont valamelyikét

$-3 = \frac{7}{2}.5 + b$

$-3 = \frac{35}{2} + b \qquad /- \frac{35}{2}$

$-\frac{41}{2} = b$

a: $y = \frac{7}{2}x - \frac{41}{2}$

$\vec{s_b} = \overrightarrow{CD} = D - C = (4; 10)$

$k_b = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

b: $y = \frac{5}{2}.x + b$

$4 = \frac{5}{2}.3 + b$

$4 = \frac{15}{2} + b \qquad /- \frac{15}{2}$

$-\frac{7}{2} = b$

b: $y = \frac{5}{2}x - \frac{7}{2}$

$\vec{s_c} = \overrightarrow{EF} = F - E = (-9; -1) \sim (1; 1)$

$k_c = \frac{1}{1} = 1$

c: $y = 1.x + b$

$-1 = 1.2 + b$

$-1 = 2 + b \qquad /- 2$

$-3 = b$

c: $y = x - 3$

$\vec{s_d} = \overrightarrow{GH} = H - G = (-2; -10) \sim (1; 5)$

$k_d = \frac{5}{1} = 5$

d: $y = 5.x + b$

$4 = 5.(-2) + b$

$4 = -10 + b \qquad /+ 10$

$14 = b$

d: $y = 5x + 14$

Adott egy egyenes iránytényezős egyenletével. Határozzuk meg az egyenes irányvektorát és egy pontját!

a, a: $y = \frac{5}{3}.x + 4$ b, b: $y = -\frac{2}{7}.x + \frac{4}{3}$

c, c: $y = \frac{1}{4}.x - 5$ d, d: $y = -3x - 8$

$k_a = \frac{5}{3} \Rightarrow \vec{s_a} = (3; 5)$

$A \in a \rightarrow A(0; y_A)$

$y_A = \frac{5}{3}.0 + 4 = 4$

A(0; 4)

$k_b = -\frac{2}{7} \Rightarrow \vec{s_b} = (7; -2)$

$B \in B \rightarrow B(7; y_B)$

$y_B = -\frac{2}{7}.7 + \frac{4}{3} = -2 + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$

$B\left(7; -\frac{2}{3}\right)$

$k_c = \frac{1}{4} \Rightarrow \vec{s_c} = (4; 1)$

$C \in c \rightarrow C(8; y_C)$

$y_C = \frac{1}{4}.8 - 5 = 2 - 5 = -3$

C(8; -3)

$k_d = -3 = -\frac{3}{1} \Rightarrow \vec{s_d} = (1; -3)$

$D \in d \rightarrow D(-3; y_D)$

$y_d = -3.(-3) - 8 = 9 - 8 = 1$

D(-3; 1)

Adott az e egyenes iránytényezős egyenletével. Az alábbi pontok közül melyek illeszkednek az egyeneshez?

e: $y = 2x - 3$

A(1; 2) B(3; 3) C(-5; -4) D(-3; -9) E(2; 1)

a pont koordinátáit behelyettesítjük az egyenletbe → ha fennáll az egyenlőség, akkor rajta fekszik

$2 = 2.1 - 3$

$2 = 2 - 3$

$2 \neq -1 \Rightarrow A \notin e$

$3 = 2.3 - 3$
$3 = 6 - 3$
$3 = 3 \Rightarrow B \in e$

$-4 = 2.(-5) - 3$
$-4 = -10 - 3$
$-4 \neq -13 \Rightarrow C \notin e$

$-9 = 2.(-3) - 3$
$-9 = -6 - 3$
$-9 = -9 \Rightarrow D \in e$

$1 = 2.2 - 3$
$1 = 4 - 3$
$1 = 1 \Rightarrow E \in e$

Határozzuk meg a pont hiányzó koordinátáját úgy, hogy illeszkedjen az egyeneshez!

a, $A(x_A; 4)$, a: $y = \frac{3}{4}.x + \frac{7}{4}$ b, $B(x_B; -1)$, b $y = -\frac{2}{3}.x + \frac{1}{3}$
c, $C(-2; y_C)$, c: $y = -3.x - 5$ d, $D(5; y_D)$, c: $y = 6.x + 1$

az adott koordinátát behelyettesítjük az egyenletbe → a hiányzót kiszámítjuk

$4 = \frac{3}{4}.x_A + \frac{7}{4}$ $\quad /-\frac{7}{4}$
$\frac{9}{4} = \frac{3}{4}.x_A$ $\quad /:\frac{3}{4}$
$3 = x_A$
A(3; 4)

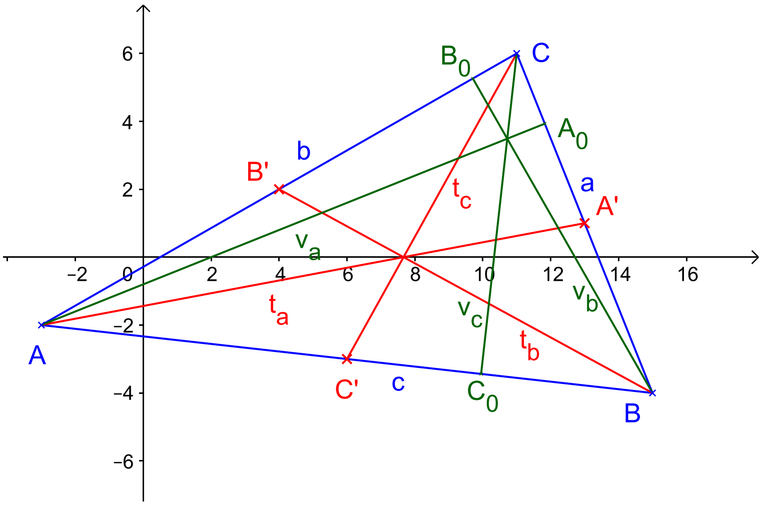
$-1 = -\frac{2}{3}.x_B + \frac{1}{3}$ $\quad /-\frac{1}{3}$
$-\frac{4}{3} = -\frac{2}{3}.x_B$ $\quad /:\left(-\frac{2}{3}\right)$
$2 = x_B$
B(2; -1)

$y_C = -3.(-2) - 5 = 6 - 5 = 1$
C(-2; 1)

$y_D = 6.5 + 1 = 30 + 1 = 31$
D(5; 31)

Adott az ABC háromszög. Írjuk fel oldalai, súlyvonalai és magasságvonalai iránytényezős egyenletét!

A(-3; -2), B(15; -4), C(11; 6)



a: BC
$\vec{s_a} = \overrightarrow{BC} = C - B = (-4; 10) \sim (-2; 5)$
$k_a = \frac{5}{-2}$

a: $y = -\frac{5}{2}.x + b$

$C \in a$

$6 = -\frac{5}{2}.11 + b$

$6 = -\frac{55}{2} + b \qquad /+\frac{55}{2}$

$\frac{67}{2} = b$

a: $y = -\frac{5}{2}x + \frac{67}{2}$

b: AC

$\vec{s_b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (14; 8) \sim (7; 4)$

$k_b = \frac{4}{7}$

b: $y = \frac{4}{7}.x + b$

$A \in b$

$-2 = \frac{4}{7}.(-3) + b$

$-2 = -\frac{12}{7} + b \qquad /+\frac{12}{7}$

$-\frac{2}{7} = b$

b: $y = \frac{4}{7}x - \frac{2}{7}$

c: AB

$\vec{s_c} = \overrightarrow{AB} = B - A = (18; -2) \sim (9; -1)$

$k_c = \frac{-1}{9}$

c: $y = -\frac{1}{9}.x + b$

$A \in c$

$-2 = -\frac{1}{9}.(-3) + b$

$-2 = \frac{1}{3} + b \qquad /-\frac{1}{3}$

$-\frac{7}{3} = b$

c: $y = -\frac{1}{9}x - \frac{7}{3}$

t_a: AA'

$A' = \frac{B+C}{2} = (13; 1)$

$\vec{s_{t_a}} = \overrightarrow{AA'} = A' - A = (16; 3)$

$k_{t_a} = \frac{3}{16}$

t_a: $y = \frac{3}{16}.x + b$

$A \in t_a$

$-2 = \frac{3}{16}.(-3) + b$

$-2 = -\frac{9}{16} + b \qquad /+\frac{9}{16}$

$-\frac{23}{16} = b$

t_a: $y = \frac{3}{16}x - \frac{23}{16}$

t_b: BB'

$B' = \frac{A+C}{2} = (4; 2)$

$\vec{s_{t_b}} = \overrightarrow{BB'} = B' - B = (-11; 6)$

$k_{t_b} = \frac{6}{-11}$

t_b: $y = -\frac{6}{11}.x + b$

$B' \in t_b$

$2 = -\frac{6}{11}.4 + b$

$2 = -\frac{24}{11} + b$ $\qquad /+\frac{24}{11}$

$\frac{46}{11} = b$

$t_b: y = -\frac{6}{11}x + \frac{46}{11}$

t_c: CC'

C' $= \frac{A+B}{2} = (6; -3)$

$\overrightarrow{s_{t_c}} = \overrightarrow{CC'} = C' - C = (-5; -9)$

$k_{t_c} = \frac{-9}{-5}$

$t_c: y = \frac{9}{5}.x + b$

$C' \in t_c$

$-3 = \frac{9}{5}.6 + b$

$-3 = \frac{54}{5} + b$ $\qquad /-\frac{54}{5}$

$-\frac{69}{5} = b$

$t_c: y = \frac{9}{5}x - \frac{69}{5}$

v_a: AA_0

$\overrightarrow{s_{v_a}} \perp \overrightarrow{s_a} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_a}} = (5; 2)$

$k_{v_a} = \frac{2}{5}$

$v_a: y = \frac{2}{5}.x + b$

$A \in v_a$

$-2 = \frac{2}{5}.(-3) + b$

$-2 = -\frac{6}{5} + b$ $\qquad /+\frac{6}{5}$

$-\frac{4}{5} = b$

$v_a: y = \frac{2}{5}x - \frac{4}{5}$

v_b: BB_0

$\overrightarrow{s_{v_b}} \perp \overrightarrow{s_b} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_b}} = (4; -7)$

$k_{v_b} = \frac{-7}{4}$

$v_b: y = -\frac{7}{4}.x + b$

$B \in v_b$

$-4 = -\frac{7}{4}.15 + b$

$-4 = -\frac{105}{4} + b$ $\qquad /+\frac{105}{4}$

$\frac{89}{4} = b$

$v_b: y = -\frac{7}{4}x + \frac{89}{4}$

v_c: CC_0

$\overrightarrow{s_{v_c}} \perp \overrightarrow{s_c} \Rightarrow \overrightarrow{s_{v_c}} = (1; 9)$

$k_{v_c} = \frac{9}{1} = 9$

$v_c: y = 9.x + b$

$C \in v_c$

$6 = 9.11 + b$

$6 = 99 + b$ $\qquad /-99$

$-93 = b$

$v_c: y = 9x - 93$

Írjuk fel az adott ponton áthaladó, adott egyenessel párhuzamos egyenes iránytényezős egyenletét:

a, A(2; -3), a: $y = \frac{3}{4}.x - \frac{7}{4}$ b, B(5; 2), b: $y = -\frac{1}{3}.x + \frac{5}{6}$

- párhuzamos egyenesek irányvektorai is párhuzamosak ⇒ lehetnek azonosak is
- az ilyen egyenesek iránytényezői (az irányvektorból számítva: második koordináta elosztva az elsővel) egyenlők
- így a párhuzamos egyenesek iránytényezős egyenletei csak a b konstansban különböznek
- különbözhetnek az irányvektorban is (a vektor a másik számszorosa) – viszont hányadosuk változatlan marad (tulajdonképpen egy bővített törtről van szó)

r_a: $y = \frac{3}{4}.x + b$

$-3 = \frac{3}{4}.2 + b$

$-3 = \frac{3}{2} + b$ $/-\frac{3}{2}$

$-\frac{9}{2} = b$

r_a: $y = \frac{3}{4}.x - \frac{9}{2}$

r_b: $y = -\frac{1}{3}.x + b$

$2 = -\frac{1}{3}.5 + b$

$2 = -\frac{5}{3} + b$ $/+\frac{5}{3}$

$\frac{11}{3} = b$

r_b: $y = -\frac{1}{3}.x + \frac{11}{3}$

Írjuk fel az adott ponton áthaladó, adott egyenesre merőleges egyenes iránytényezős egyenletét:

a, C(-3; 4), c: $y = \frac{1}{2}.x + \frac{5}{2}$ b, D(6; 1), d: $y = 5x + 4$

- merőleges egyenesek irányvektorai is merőlegesek

$\overrightarrow{s_c} = (s_1; s_2) \longrightarrow k_c = \frac{s_2}{s_1}$

$\overrightarrow{s_{k_c}} \perp \overrightarrow{s_c} \Rightarrow \overrightarrow{s_{k_c}} = (s_2; -s_1)$

$k_{k_c} = \frac{-s_1}{s_2} = -\frac{1}{\frac{s_2}{s_1}} = -\frac{1}{k_c}$

T. Az egyenesre merőleges egyenes iránytényezője az egyenes iránytényezője reciprokának az ellentettje:

$r \perp p \Rightarrow k_r = -\frac{1}{k_p}$

$k_{k_c} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$

k_c: $y = -2.x + b$

$4 = -2.(-3) + b$

$4 = 6 + b$ $/-6$

$-2 = b$

k_c: $y = -2x - 2$

$k_{k_d} = -\frac{1}{5}$

k_d: $y = -\frac{1}{5}.x + b$

$1 = -\frac{1}{5}.6 + b$

$1 = -\frac{6}{5} + b$ $/+\frac{6}{5}$

$\frac{11}{5} = b$

k_d: $y = -\frac{1}{5}.x + \frac{11}{5}$

Adott az egyenes paraméteres egyenletével. Írjuk fel az egyenes általános és iránytényezős egyenletét!

a, a: $x = 2 + 3t$ $\quad$ b, b: $x = -1 - t$
$y = 5 + 4t$ $\quad$ $y = 3 + 2t$

a paraméteres egyenletből áttérni egy másik típusú egyenletre történhet az egyenes irányvektorának és egy pontjának segítségével

$\vec{s_a} = (3; 4)$
$A \in a \rightarrow A(2; 5)$

az általános egyenlethez a normálvektor kell, amely merőleges az irányvektorra

$\vec{n_a} \perp \vec{s_a} \Rightarrow \vec{n_a} = (4; -3)$

a: $4.x - 3.y + c = 0$
$4.2 - 3.5 + c = 0$
$8 - 15 + c = 0$
$-7 + c = 0$ $\quad$ /+ 7
$c = 7$

a: $4x - 3y + 7 = 0$

ezek után egyszerű rendezéssel kapjuk az egyenes iránytényezős egyenletét → kifejezzük az y-t

$4x - 3y + 7 = 0$ $\quad$ /+ 3y
$4x + 7 = 3y$ $\quad$ /:3
$\frac{4}{3}x + \frac{7}{3} = y$

a: $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$

a másik módszer egyszerűbb: a paraméter eliminációja – úgy szorozzuk egyenleteinket, hogy összevonáskor a paraméter eltűnjön

$x = 2 + 3t$ $\quad$ /.4
$y = 5 + 4t$ $\quad$ /.(-3)
$4x = 8 + 12t$
$-3y = -15 - 12t$
$4x - 3y = -7$ $\quad$ /+ 7

a: $4x - 3y + 7 = 0$

$x = -1 - t$ $\quad$ /.2
$y = 3 + 2t$
$2x = -2 - 2t$
$y = 3 + 2t$
$2x + y = 1$ $\quad$ /- 1

b: $2x + y - 1 = 0$

$2x + y = 1$ $\quad$ /- 2x + 1

b: $y = -2x + 1$

Adott az egyenes általános egyenletével. Írjuk fel az egyenes paraméteres és iránytényezős egyenletét!

a, c: $5x - 7y - 3 = 0$ $\quad$ b, d: $3x + 2y + 3 = 0$

áttérni az egyenes általános egyenletéről a paraméteres egyenletre csak az egyenes normálvektorán és egy pontján keresztül megvalósítható

$\vec{n_c} = (5; -7)$
$\vec{s_c} \perp \vec{n_c} \Rightarrow \vec{s_c} = (7; 5)$
$C \in c \rightarrow C(2; y_C)$
$5.2 - 7.y_C - 3 = 0$
$10 - 7y_C - 3 = 0$ $\quad$ /+ $7y_C$
$7 = 7y_C$ $\quad$ /:7
$1 = y_C$
$C(2; 1)$

c: $x = 2 + 7t$
$y = 1 + 5t$

áttérni az egyenes általános egyenletéről az iránytényezős egyenletre csak az egyenlet rendezését jelenti

$5x - 7y - 3 = 0$ $\quad$ /+ 7y
$5x - 3 = 7y$ $\quad$ /:7

$\frac{5}{7}x - \frac{3}{7} = y$

c: $y = \frac{5}{7}x - \frac{3}{7}$

$\overrightarrow{n_d} = (3; 2)$

$\overrightarrow{s_d} \perp \overrightarrow{n_d} \Rightarrow \overrightarrow{s_d} = (2; -3)$

$D \in d \rightarrow D(x_D; 3)$

$3.x_D + 2.3 + 3 = 0$

$3x_D + 6 + 3 = 0 \quad /- 9$

$3x_D = -9 \quad /:3$

$x_D = -3$

D(-3; 3)

d: $x = -3 + 2t$
$y = 3 - 3t$

$3x + 2y + 3 = 0 \quad /- 3x - 3$

$2y = -3x - 3 \quad /:2$

$y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

d: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

Adott az egyenes iránytényezős egyenletével. Írjuk fel az egyenes paraméteres és általános egyenletét!

a, e: $y = -4x + 1$ b, f: $y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}$

áttérni az egyenes iránytényezős egyenletéről a paraméteres egyenletre csak az egyenes iránytényezőjén és egy pontján keresztül lehet

$k_e = -4 = -\frac{4}{1} \Rightarrow \overrightarrow{s_e} = (1; -4)$

$E \in e \rightarrow E(1; y_E)$

$y_E = -4.1 + 1 = -4 + 1 = -3$

E(1; -3)

e: $x = 1 + t$
$y = -3 - 4t$

áttérni az egyenes iránytényezős egyenletéről az általános egyenletre csak rendezést jelent

$y = -4x + 1 \quad /+ 4x - 1$

$y + 4x - 1 = 0$

e: $4x + y - 1 = 0$

$k_f = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{s_f} = (5; 3)$

$F \in f \rightarrow F(3; y_F)$

$y_F = \frac{3}{5}.3 + \frac{1}{5} = \frac{9}{5} + \frac{1}{5} = \frac{10}{5} = 2$

F(3; 2)

f: $x = 3 + 5t$
$y = 2 + 3t$

$y = \frac{3}{5}x + \frac{1}{5} \quad /.5$

$5y = 3x + 1 \quad /-5y$

$0 = 3x + 1 - 5y$

f: $3x - 5y + 1 = 0$