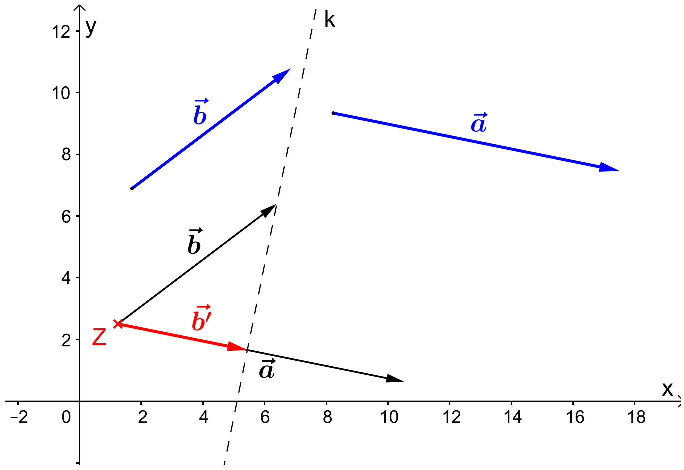
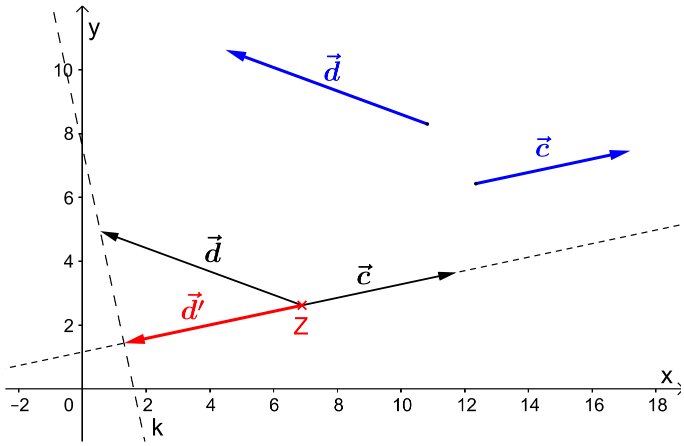
Vektorok skaláris szorzata
(Skalárny súčin vektorov)

Számok szorzásánál számot kapunk eredményül. Leképezések szorzásánál (kompozíciója) (vagyis egymás után végrehajtott leképezéseknél – az első leképezés képe lesz a második őse) leképezést kapunk. Kifejezések szorzásánál kifejezés keletkezik.

Viszont két vektor szorzásánál az eredmény különbözhet – kaphatok eredményül számot, de akár vektort is. Az elsőt úgy nevezzük, hogy vektorok skaláris szorzata, míg a másik a vektorok vektoriális szorzata. De mivel a vektorok szorzásakor keletkezett vektor merőleges a két vektorra (vagyis az általuk kifeszített síkra), ezért ehhez nem elég a kétdimenziós síkunk – csak térben értelmezhető ez a művelet (*Két vektor vektoriális szorzata az a vektor, mely merőleges a vektorok által meghatározott síkra, az eredeti vektorokkal jobbsodrású rendszert alkot – sorrendben az első tényező, a második tényező és a szorzat – nagysága pedig a tényezők által kifeszített paralelogramma területével egyenlő.* jelölés: $\vec{a} \times \vec{b}$ vagy $[\vec{a};\vec{b}]$). Síkban csak a vektorok skaláris szorzata értelmezhető.

Adott két vektor – ábráinkon két vektorpár: $\vec{a}$ és $\vec{b}$; $\vec{c}$ és $\vec{d}$ – két különböző eset. Felvesszük a sík egy tetszőleges pontbeli reprezentását mindkét vektornak. Ezután az egyik vektor végpontjából merőlegest bocsájtunk a másik vertorra. Az első ábrán a metszéspont a vektorra esik (ha nem, akkor félegyenesre egészítjük ki); a másik ábrán vektorunkat ki kellett terjesztenünk a tartóegyenesére (az egyenes, melyhez illeszkedik a vektor). Az új vektornak közös a kezdőpontja az eredeti két vektor kezdőpontjával, végpontja pedig a merőleges metszéspontja a vektorral (vagy tartóegyenesével) – jelöljük jelzett betűkkel $(\vec{b}'; \vec{d}')$. Tulajdonképpen merőlegesen levetítettük a második vektort az első tartóegyenesére.
A két vektor skaláris szorzatát megkapom, ha az első vektor nagyságát megszorzom a jelzett vektor nagyságával. Még az előjel kérdését kell külön megoldanunk – a szorzat pozitív az első esetben, a másodikban pedig negatív.

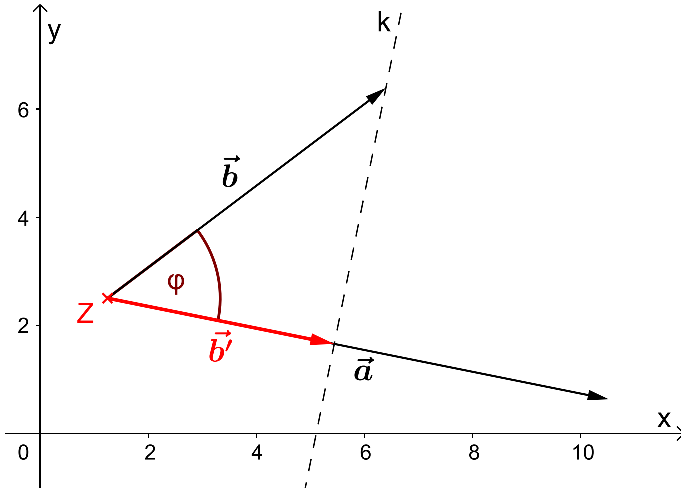


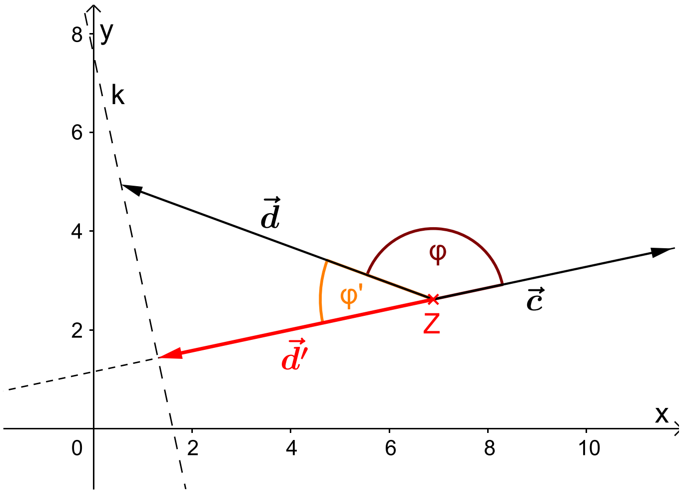


D. Két vektor ***skaláris szorzatát*** megkapom, ha az egyik vektor nagyságát megszorzom a másik vektor első vektor tartóegyenesére vetített merőleges vetületének a nagyságával. Az előjele aszerint lesz pozitív vagy negatív, amint a merőleges vetület iránya megegyezik vagy ellentett az első vektor irányával.

jelölés: $\vec{a}.\vec{b}$ vagy $(\vec{a};\vec{b})$

$$\vec{a}.\vec{b} = \pm|\vec{a}|.|\vec{b}'|$$





Ha megnézzük a harmadik ábrát, láthatunk egy derékszögű háromszöget, melyben szögfüggvényt alkalmazhatunk a második vertor és merőleges vetülete által bezárt szögre – a φ szögre. Írjuk fel a második $\vec{b}$ vektor és $\vec{b'}$ merőleges vetülete közötti összefüggést. A vektor a derékszögű háromszög átfogója, míg a merőleges vetülete a φ szöghöz viszonyított mellette lévő befogó. Derékszögű háromszögben a koszinusz függvény jelenti a szög melleti befogó és az átfogó hányadosát:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{b'}|}{|\vec{b}|}$$

Ha ebből kifejezzük a merőleges vetület hosszát és behelyettesítjük a definícióba, kapjuk hogy:

$$|\vec{b}|.\cos\varphi = |\vec{b'}|$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi$$

A negyedik ábrán szintén keletkezett egy derékszögű háromszög. A $\vec{d}$ vektor és $\vec{d'}$ merőleges vetülete által bezárt φ' szög a φ szög kiegészítő szöge. Itt viszont definíció szerint a skaláris szorzat negatív szám.

$$\vec{c}.\vec{d} = -|\vec{c}|.|\vec{d'}|$$

$$\cos\varphi' = \frac{|\vec{d'}|}{|\vec{d}|}$$

$$|\vec{d}|.\cos\varphi' = |\vec{d'}|$$

$$\vec{c}.\vec{d} = -|\vec{c}|.|\vec{d}|.\cos\varphi'$$

A koszinuszfüggvény tulajdonságaiból ismert, hogy a tompaszögek koszinusz értékei negatívak. Kiegészítő szögek koszinusz értékei pedig ellentettek:

$$\cos\varphi = -\cos\varphi'$$

A skaláris szorzatba behelyettesítve kapjuk:

$$\vec{c}.\vec{d} = |\vec{c}|.|\vec{d}|.\cos\varphi$$

Vagyis: ha a vektorok által bezárt szög mehet 0°-tól 180°-ig (nem úgy, mint az egyeneseké), akkor a vektorok skaláris szorzatát megkapom, ha összeszorzom a vektorok nagyságát és ez tovább szorzom az általuk bezárt szög koszinuszával.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi$$

M. A koszinusz megoldja az előjel problémáját.
M. Ez az összefüggés viszon általában nem a vektorok skaláris szorzatának kiszámításánál használatos. Átalakítva a két vektor által bezárt szöget számoljuk vele.

Természetesen a skaláris szorzatot nem a definíció szerint oldjuk. Mivel vektoraink általában koordinátáikkal adottak, ezért a skaláris szorzatot is belőlük számoljuk az alábbi tétel alapján.

T. Adottak az $\vec{a}$ és a $\vec{b}$ vektorok koordinátáikkal: $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Ekkor:

$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$ a komponensek kompozítuma

M. Térben: $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Egy esetet viszont még kihagytunk. Mi van, ha vektoraink merőlegesek?

A második vektor végpontjából az első vektorra bocsájtott merőleges egyenes metszéspontja egybeesik a vektorok közös kezdőpontjával. Ekkor a második vektor merőleges vetülete nullvektor lesz. De annak a hossza nulla.

T. Merőleges vektorok skaláris szorzata nulla.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

M. Ha két vektor skaláris szorzata nulla, akkor ők merőlegesek egymásra: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
Mi van, ha az egyik (vagy mindkettő) vektor nullvektor? Ekkor a nullvektor merőleges vetülete szintén nullvektor. Így a skaláris szorzat nulla lesz. Akkor a nullvektor merőleges lenne a nemnullvektorra (vagy nullvektorra)?
T. A nullvektor merőleges bármely más vektorra.

Hogy találjunk olyan vektort (meghatározni a koordinátáit). amelyik merőleges az adott vektorra?
Adott az $\vec{a}$ vektor koordinátáival: $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Ha már ismernénk a keresett $\vec{b} = (b_1; b_2)$ vektort, akkor ezek skaláris szorzata nulla lenne.

$$\vec{a}.\vec{b} = 0$$

$$a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$$

Ha ugyanazokat a számokat szoroznám össze (felcserélném az $\vec{a}$ vektor koordinátáit): $b_1 = a_2$ és $b_2 = a_1$, kétszeres értéket kapnék:

$$a_1.a_2 + a_2.a_1 = 2.a_1.a_2$$

Viszont, ha közben megvátoztatom az egyik előjelét: $b_2 = -a_1$, akkor a másik szorzat pont ellentett értékű lesz:

$$a_1.a_2 + a_2.(-a_1) = a_1.a_2 - a_2.a_1 = 0$$

T. Legyen adott egy vektor koordinátáival $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Ekkor az adott vektorra merőleges vektor koordinátáit úgy kapom, ha felcserélem a koordinátákat és az egyik előjelét megváltoztatom.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = (a_2; -a_1) \quad \text{vagy} \quad \vec{b} = (-a_2; a_1)$$

Szorozzuk meg a vektort önmagával – skaláris szorzat. A vektor nagyságának a négyzetét kapom.

$$\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = a_1.a_1 + a_2.a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$$

példa:

Számítsuk ki a vektorok skaláris szorzatát:

a, $\vec{a} = (5; 4)$; $\vec{b} = (-2; 7)$ b, $\vec{c} = (-1; -3)$; $\vec{d} = (-4; 2)$ c, $\vec{e} = (12; 11)$; $\vec{f} = (-3; 3)$
d, $\vec{g} = (6; -4)$; $\vec{h} = (2; 3)$ e, $\vec{i} = (1; -1)$; $\vec{j} = (-1; 1)$ f, $\vec{k} = (3; -5)$; $\vec{l} = (4; 3)$

a, $\vec{a}.\vec{b} = 5.(-2) + 4.7 = -10 + 28 = 18$

---

b, $\vec{c}.\vec{d} = -1.(-4) + (-3).2 = 4 - 6 = -2$

---

c, $\vec{e}.\vec{f} = 12.(-3) + 11.3 = -36 + 33 = -3$

---

d, $\vec{g}.\vec{h} = 6.2 + (-4).3 = 12 - 12 = 0$

---

e, $\vec{i}.\vec{j} = 1.(-1) + (-1).1 = -1 - 1 = -2$

---

f, $\vec{k}.\vec{l} = 3.4 + (-5).3 = 12 - 15 = -3$

Írjuk fel az adott vektorra merőleges vektor koordinátáit:

a, $\vec{a} = (6; 5)$ b, $\vec{c} = (-3; 7)$ c, $\vec{e} = (8; -13)$ d, $\vec{g} = (-4; -9)$

a, $\vec{b} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (5; -6)$

---

b, $\vec{d} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{d} = (7; 3)$

---

c, $\vec{f} \perp \vec{e} \Rightarrow \vec{f} = (13; 8)$

---

d, $\vec{h} \perp \vec{g} \Rightarrow \vec{h} = (9; -4)$

Határozzuk meg a vektor hiányzó koordinátáját úgy, hogy a skaláris szorzat az adott értékre jöjjön ki:

a, $\vec{a} = (3; -2)$; $\vec{b} = (b_1; 5)$; $\vec{a}.\vec{b} = 8$
b, $\vec{c} = (4; 6)$; $\vec{d} = (-2; d_2)$; $\vec{c}.\vec{d} = -5$
c, $\vec{e} = (1; e_2)$; $\vec{f} = (12; 9)$; $\vec{e}.\vec{f} = 27$
d, $\vec{g} = (g_1; 6)$; $\vec{h} = (1; -2)$; $\vec{g}.\vec{h} = -4$

a, $\vec{a}.\vec{b} = 3.b_1 + (-2).5 = 3b_1 - 10$

$3b_1 - 10 = 8$ /+10

$3b_1 = 18$ /:3

$b_1 = 6$

---

b, $\vec{c}.\vec{d} = 4.(-2) + 6.d_2 = -8 + 6d_2$

$-8 + 6d_2 = -5$ /+8

$6d_2 = 3$ /:6

$d_2 = \frac{1}{2}$

---

c, $\vec{e}.\vec{f} = 1.12 + e_2.9 = 12 + 9e_2$

$12 + 9e_2 = 27$ /-12

$9e_2 = 15$ /:9

$e_2 = \frac{5}{3}$

---

d, $\vec{g}.\vec{h} = g_1.1 + 6.(-2) = g_1 - 12$

$g_1 - 12 = -4$ /+12

$g_1 = 8$