

Priamka a kružnica

treba riešiť sústavu rovníc

rovnica priamky (lineárna) + rovnica kružnice (kvadratická)

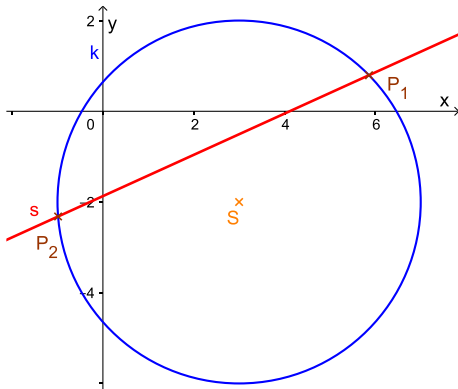
zlúčená rovnica → kvadratická

počet riešení sústavy = počet spoločných bodov priamky a kružnice

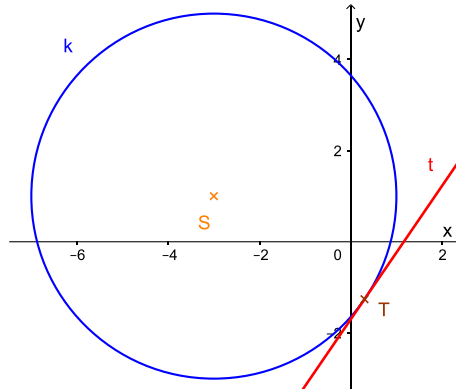
a, dve riešenia ⇒ dva spoločné body ($p \cap k = \{P_1; P_2\}$) ⇒ **sečnica**

b, jedno riešenie ⇒ jeden spoločný bod ($p \cap k = \{T\}$) ⇒ **dotyčnica**

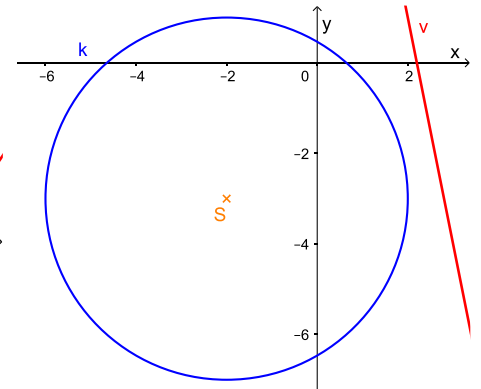
c, nemá riešenie ⇒ nemajú spoločný bod ($p \cap k = \emptyset$) ⇒ **nesečnica** (vonkajšia priamka)



sečnica



dotyčnica



nesečnica

ak je daná kružnica a dotykový bod:

$$k: (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2; T(x_0; y_0)$$

potom rovnica dotyčnice:

$$t: (x_0 - u) \cdot (x - u) + (y_0 - v) \cdot (y - v) = r^2$$

príklad:

Určte spoločné body kružnice a priamky ak existujú:

a, k: $x^2 + y^2 = 13$

a: $x = -2 + t$

$y = 3 - t$

c, m: $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 34$

c: $y = \frac{3}{5}x + \frac{9}{5}$

b, l: $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$

b: $2x + y - 2 = 0$

d, n: $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 21 = 0$

d: $x = 2 + t$
 $y = -2 + 8t$

a, $(-2 + t)^2 + (3 - t)^2 = 13$

po dosadení do rovnice kružnice parametrické výrazy umocníme zátvorky

$$4 - 4t + t^2 + 9 - 6t + t^2 = 13$$

$$2t^2 - 10t + 13 = 13 \quad /-13$$

$$2t^2 - 10t = 0$$

$$2t(t - 5) = 0$$

$$t_1 = 0$$

$$t - 5 = 0$$

$$t_2 = 5$$

$$x_1 = -2 + 0 = -2$$

$$y_1 = 3 - 0 = 3$$

$$x_2 = -2 + 5 = 3$$

$$y_2 = 3 - 5 = -2$$

$P_1 = (-2; 3); P_2 = (3; -2)$

b, $y = 2 - 2x$

$$(x - 2)^2 + (2 - 2x - 3)^2 = 25$$

$$(x - 2)^2 + (-1 - 2x)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + 1 + 4x + 4x^2 = 25$$

$$5x^2 + 5 = 25 \quad /-5$$

$$5x^2 = 20 \quad /:5$$

$$x^2 = 4 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$|x| = 2$$

$$x_1 = -2 \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = 2 - 2 \cdot (-2) = 2 + 4 = 6$$

$$y_2 = 2 - 2 \cdot 2 = 2 - 4 = -2$$

$$P_1 = (-2; 6); \quad P_2 = (2; -2)$$

$$c, \quad (x-5)^2 + \left(\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} + 2\right)^2 = 34$$

$$(x-5)^2 + \left(\frac{3}{5}x + \frac{19}{5}\right)^2 = 34$$

$$x^2 - 10x + 25 + \frac{9}{25}x^2 + \frac{114}{25}x + \frac{361}{25} = 34 \quad / \cdot 25$$

$$25x^2 - 250x + 625 + 9x^2 + 114x + 361 = 850$$

$$34x^2 - 136x + 986 = 850 \quad / -850$$

$$34x^2 - 136x + 136 = 0 \quad / :34$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$|x-2| = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$y = \frac{3}{5} \cdot 2 + \frac{9}{5} = \frac{6}{5} + \frac{9}{5} = 3$$

$$T(2; 3)$$

$$d, (2+t)^2 + (-2+8t)^2 + 8(2+t) - 10(-2+8t) + 21 = 0$$

$$4 + 4t + t^2 + 4 - 32t + 64t^2 + 16 + 8t + 20 - 80t + 21 = 0$$

$$65t^2 - 100t + 65 = 0 \quad / :5$$

$$13t^2 - 20t + 13 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4 \cdot 13 \cdot 13}}{2 \cdot 13} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 676}}{26} = \frac{20 \pm \sqrt{-276}}{26}$$

nemá riešenie \Rightarrow vonkajšia priamka

Vypočítajte dĺžku tetivy ktorú vytína kružnica na priamke v predchádzajúcich príkladoch:

$$a, |P_1P_2| = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-2 - 3)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} \doteq 7,0711$$

$$b, |P_1P_2| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 6)^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2} = \sqrt{80} \doteq 8,9443$$

Napíšte rovnicu dotyčnice kružnice v bode T: $(x+4)^2 + (y+1)^2 = 10$; $T(-5; y_T > 0)$

vypočítame chýbajúcu súradnicu dotykového bodu – dosadíme do rovnice kružnice

$$(-5+4)^2 + (y+1)^2 = 10$$

$$(-1)^2 + (y+1)^2 = 10$$

$$1 + (y+1)^2 = 10 \quad / -1$$

$$(y+1)^2 = 9 \quad / \sqrt{\quad}$$

$$|y+1| = 3$$

$$y+1 = 3$$

$$y_1 = 2$$

$$y+1 = -3$$

$$y_2 = -4$$

$$T(-5; 2)$$

z rovnice kružnice stred: $S(-4; -1)$

$$TS \perp t \Rightarrow \vec{TS} = \vec{n}_t = S - T = (1; -3)$$

$$t: 1 \cdot x - 3 \cdot y + c = 0$$

$$1 \cdot (-5) - 3 \cdot 2 + c = 0$$

$$c = 11$$

$$t: x - 3y + 11 = 0$$

Určte hodnotu parametra q tak, aby rovnica $qx - 4y - 20 = 0$ bola rovnicou dotyčnice ku kružnici $x^2 + y^2 = 20$.

vyjadrime y

$$\begin{aligned} qx - 4y - 20 &= 0 \\ 4y &= 20 - qx \\ \frac{20 - qx}{4} &= y \end{aligned}$$

dosadíme do rovnice k

$$x^2 + \left(\frac{20 - qx}{4}\right)^2 = 20$$

umocníme

$$x^2 + \frac{400 - 40qx + q^2x^2}{16} = 20 \quad /.16$$

odstránime zlomok

$$16x^2 + 400 - 40qx + q^2x^2 = 320$$

anulujeme rovnicu a vyjmeme x^2

$$x^2(16 + q^2) - 40qx + 80 = 0$$

je to kvadratická rovnica s neznámou x a parametrom a

$$a = 16 + q^2 \qquad b = -40q \qquad c = 80$$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D : jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = (-40q)^2 - 4 \cdot (16 + q^2) \cdot 80 = 1600q^2 - 5120 - 320q^2 = 1280q^2 - 5120$$

$$1280q^2 - 5120 = 0$$

$$1280q^2 = 5120$$

$$q^2 = \frac{5120}{1280} = 4$$

$$|q| = 2$$

$$q_1 = -2$$

$$q_2 = 2$$

$$t_1: -2x - 4y - 20 = 0$$

$$t_2: 2x - 4y - 20 = 0$$

Napíšte rovnicu dotyčnice ku kružnici, ktorá je rovnobežná s danou priamkou:

$$a, k: 4x^2 + 4y^2 - 24x + 16y - 117 = 0 \quad b, l: x^2 + (y + 4)^2 = 0$$

$$a: 12x - 5y - 110 = 0$$

$$b: y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

a, 1. spôsob (iba pri kružnici platí)

nájdem stred kružnice – upravíme rovnicu na stredový tvar

$$4x^2 - 24x + 4y^2 + 16y = 117$$

$$4(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 4y) = 117$$

$$4(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = 117 + 4 \cdot 9 + 4 \cdot 4$$

$$4(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 169$$

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{169}{4}$$

$$S(3; -2)$$

napíšeme rovnicu kolmej priamky m na danú priamku a prechádzajúcu stredom kružnice

$$\vec{n}_a(12; -5) \perp \vec{n}_m \Rightarrow \vec{n}_m(5; 12)$$

$$m: 5x + 12y + c = 0$$

$$5 \cdot 3 + 12(-2) + c = 0$$

$$15 - 24 + c = 0$$

$$c = 9$$

$$m: 5x + 12y + 9 = 0$$

určíme spoločné body kolmej priamky s kružnicou – dotykové body

$$5x = -12y - 9$$

$$x = \frac{-12y - 9}{5}$$

$$4\left(\frac{-12y-9}{5}\right)^2 + 4y^2 - 24\frac{-12y-9}{5} + 16y - 117 = 0$$

$$4\frac{144y^2+216y+81}{25} + 4y^2 - \frac{-288y-216}{5} + 16y - 117 = 0 \quad /:25$$

$$576y^2 + 864y + 324 + 100y^2 + 1440y + 1080 + 400y - 2925 = 0$$

$$676y^2 + 2704y - 1521 = 0 \quad /:169$$

$$4y^2 + 16y - 9 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-9)}}{2 \cdot 4} = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 144}}{8} = \frac{-16 \pm 20}{8} = \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{2} = 0,5 \\ \searrow -\frac{9}{2} = -4,5 \end{matrix}$$

$$x_1 = \frac{-12 \cdot 0,5 - 9}{5} = -3$$

$$x_2 = \frac{-12 \cdot (-4,5) - 9}{5} = 9$$

$$T_1(-3; 0,5); \quad T_2(9; -4,5)$$

určíme rovnice rovnobežných dotyčnic prechádzajúcich dotykovými bodmi

$$t: 12x - 5y + c = 0$$

$$12 \cdot (-3) - 5 \cdot 0,5 + c = 0$$

$$-36 - 2,5 + c = 0$$

$$c = 38,5$$

$$12 \cdot 9 - 5 \cdot (-4,5) + c = 0$$

$$108 + 22,5 + c = 0$$

$$c = -130,5$$

$$t_1: 24x - 10y + 77 = 0$$

$$t_2: 24x - 10y - 261 = 0$$

b, 2. spôsob

priamka je daná smernicovou rovnicou

rovnobežná dotyčnica musí mať tú istú smernicu – rovnica sa líši iba v konštante

$$t: y = \frac{3}{4}x + q$$

dosadíme do rovnice kružnice

$$x^2 + \left(\frac{3}{4}x + q + 4\right)^2 = 100$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 + q^2 + 16 + \frac{3}{2}qx + 6x + 8q = 100$$

$$\frac{25}{16}x^2 + x\left(\frac{3}{2}q + 6\right) + q^2 + 8q - 84 = 0$$

$$a = \frac{25}{16}$$

$$b = \frac{3}{2}q + 6$$

$$c = q^2 + 8q - 84$$

počet riešení kvadratickej rovnice závisí od D: jedno riešenie $\Leftrightarrow D = 0$

$$D = b^2 - 4ac = \left(\frac{3}{2}q + 6\right)^2 - 4 \cdot \frac{25}{16} \cdot (q^2 + 8q - 84) = \frac{9}{4}q^2 + 18q + 36 - \frac{25}{4}q^2 - 50q + 525 =$$

$$= -4q^2 - 32q + 561$$

$$-4q^2 - 32q + 561 = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{32 \pm \sqrt{(-32)^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 561}}{2 \cdot (-4)} = \frac{32 \pm \sqrt{1024 + 8976}}{-8} = \frac{32 \pm 100}{-8} = \begin{matrix} \nearrow -\frac{33}{2} = -16,5 \\ \searrow \frac{17}{2} = 8,5 \end{matrix}$$

$$t_1: y = \frac{3}{4}x - \frac{33}{2}$$

$$t_2: y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{2}$$