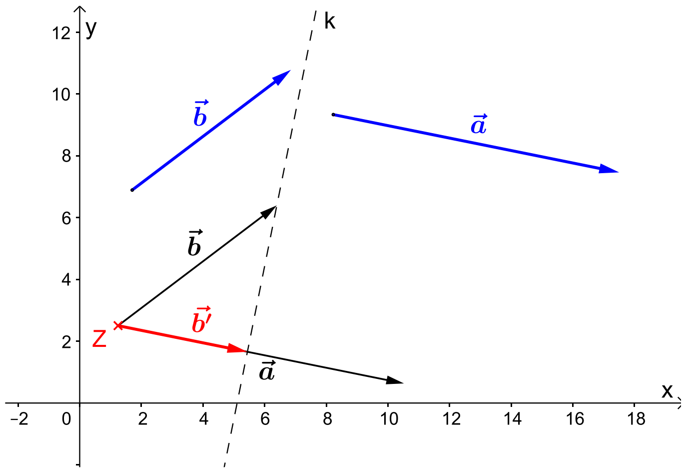
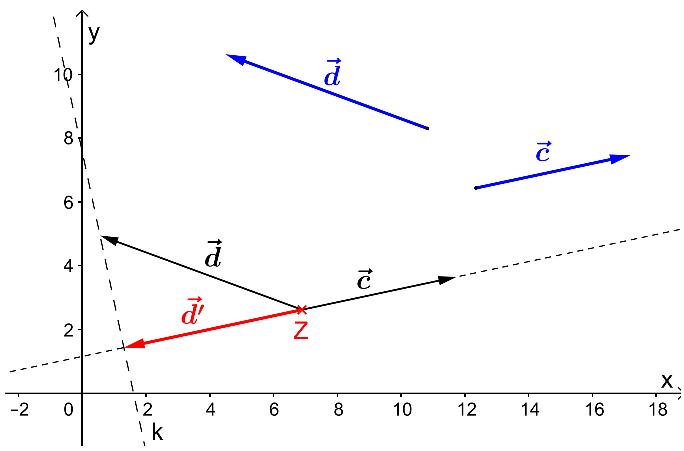
Skalárny súčin vektorov

Pri násobení čísel dostanem číslo. Ak násobím zobrazenia (kompozícia) (za sebou urobím obrazy – obraz prvého zobrazenia je vzorom druhého) dostanem zobrazenie. Keď násobím výrazy výsledok je výraz.

Ale ak násobíme dva vektory, výsledok môže byť rôzny – môžem dostať číslo ale aj vektor. Prvý je takzvaný skalárny a druhý je vektorový súčin dvoch vektorov. Lenže vektor, ktorý dostaneme násobením dvoch vektorov bude kolmý na obidva vektory (čiže na rovinu ktorú určia tie dva vektory), preto nestačí nám dvojrozmerný pracovný priestor – iba v klasickom trojrozmernom priestore vieme určiť takýto súčin (*Vektorový súčin dvoch vektorov je vektor kolmý na rovinu činiteľov, ktorý spolu s vektormi tvorí pravotočivú sústavu – v poradí: prvý činiteľ, druhý činiteľ a súčin – a veľkosť má obsah rovnobežníka určeného činiteľmi*. $\vec{a} \times \vec{b}$ alebo $[\vec{a}; \vec{b}]$).
V rovine jedine skalárny súčin dvoch vektorov môžeme definovať.

Dané sú dva vektory: na obrázku dvojica vektorov $\vec{a}$ a $\vec{b}$; $\vec{c}$ a $\vec{d}$ – dva rôzne prípady. Umiestnime ich do jedného bodu roviny. Potom urobme kolmicu na jeden vektor z koncového bodu druhého vektora. Na prvom obrázku priesečník vychádza na prvom vektore (ak nie, doplňme na polpriamku); na druhom obrázku sme museli rozšíriť vektor na priamku. Nový vektor, ktorý má spoločný začiatočný bod s dvojicou vektorov, a koncovým bodom je priesečník, označme s čiarkovaným názvom $(\vec{b'}; \vec{d'})$. Vlastne pravouhlo (kolmo) premietneme druhý vektor na priamku určenú prvým vektorom.
Skalárny súčin dvoch vektorov dostanem, ak veľkosť prvého vektora vynásobím s veľkosťou čiarkovaného vektora. Ešte znamienko treba zvlášť riešiť – súčin bude kladný v prvom prípade a v druhom záporný.

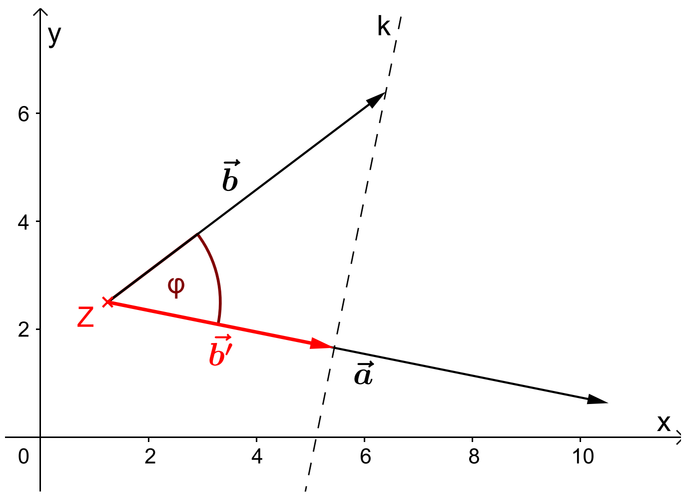


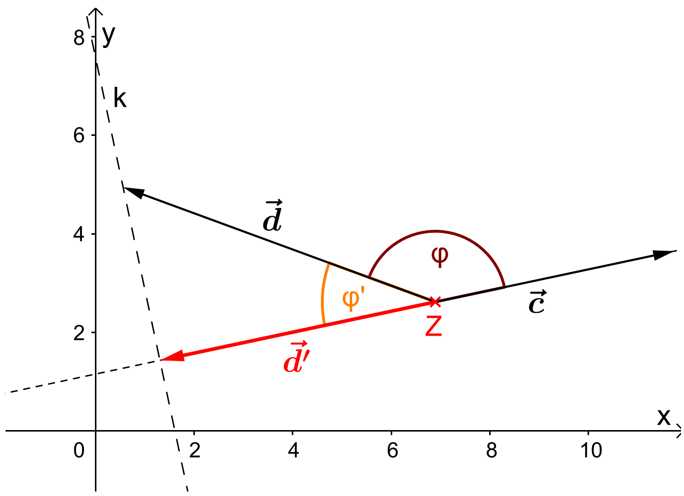


D. *Skalárny súčin* dvoch vektorov dostanem, ak vynásobím veľkosť prvého vektora s veľkosťou pravouhlého priemetu druhého vektora na priamke obsahujúcej prvý vektor. Znamienko podľa toho bude kladné alebo záporné, či ten pravouhlý priemet má rovnaký alebo opačný smer ako prvý vektor.

zápis: $\vec{a}.\vec{b}$ alebo $(\vec{a}; \vec{b})$

$$\vec{a}.\vec{b} = \pm|\vec{a}|.|\vec{b'}|$$





Keď sa pozrime na tretí obrázok, vidíme pravouhlý trojuholník, v ktorom môžeme využiť goniometrickú funkciu na uhol čo zviera druhý vektor s jeho pravouhlým priemetom – uhol φ. Napíšme vzťah medzi druhým vektorom

$\vec{b}$ a jeho pravouhlým priemetom $\vec{b'}$. Vektor je preponou a jeho priemet je priľahlá strana vzhľadom na uhol φ. V pravouhlom trojuholníku goniometrická funkcia kosínus je pomer priľahlej strany a prepony:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{b'}|}{|\vec{b}|}$$

Z toho ak vyjadríme veľkosť pravouhlého priemetu a dosadíme do definície, dostaneme:

$$|\vec{b}|.\cos\varphi = |\vec{b'}|$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi$$

Na štvrtom obrázku takisto vznikol pravouhlý trojuholník. Vektor $\vec{d}$ s jeho pravouhlým priemetom $\vec{d'}$ zvierajú uhol φ', čo je výplnkovým uhlom k uhlu φ. Tu ale skalárny súčin podľa definície vychádza na záporné číslo.

$$\vec{c}.\vec{d} = -|\vec{c}|.|\vec{d'}|$$

$$\cos\varphi' = \frac{|\vec{d'}|}{|\vec{d}|}$$

$$|\vec{d}|.\cos\varphi' = |\vec{d'}|$$

$$\vec{c}.\vec{d} = -|\vec{c}|.|\vec{d}|.\cos\varphi'$$

Z vlastnosti funkcie kosínus vieme, že kosínusové hodnoty tupých uhlov sú záporné. Kosínusové hodnoty výplnkových uhlov sú opačné:

$$\cos\varphi = -\cos\varphi'$$

Po dosadení do skalárneho súčinu dostaneme:

$$\vec{c}.\vec{d} = |\vec{c}|.|\vec{d}|.\cos\varphi$$

Čiže: ak odchýlka (uhol) vektorov môže ísť od 0° až po 180° (nie ako uhol priamok), potom skalárny súčin dvoch vektorov dostanem, ak vynásobím veľkosti vektorov a tento súčin ešte ďalej násobím s kosínusovou hodnotou nimi zovretého uhla.

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos\varphi$$

P. Kosínus nám vyrieši problém so znamienkom.
P. Tento vzťah ale väčšinou neslúži na výpočet skalárneho súčinu. Ale upraveným tvarom sa počíta uhol dvoch vektorov.

Samozrejme skalárny súčin dvoch vektorov neriešime podľa tejto definície. Vektory sú dané väčšinou súradnicami. Zo súradníc vieme vypočítať skalárny súčin podľa nasledujúcej vety.

V. Dané sú vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$ súradnicami: $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Potom:

$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$ kompozícia komponentov

P. V priestore: $\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Jeden prípad sme ale ešte neriešili. Čo, ak sú vektory kolmé?
Kolmica z koncového bodu druhého vektora na prvý vektor má priesečník v spoločnom začiatočnom bode. Preto pravouhlý priemet druhého vektora je nulový vektor. Ten ale má veľkosť nulu.

V. Skalárny súčin kolmých vektorov je nula.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$$

P. Ak skalárny súčin sa rovná nule, potom vektory sú kolmé: $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
Čo, ak jeden (alebo obidva) vektor je nulový vektor? Vtedy ten pravouhlý priemet nulového vektora je takisto nulový vektor. Takto dostaneme skalárny súčin nulový. Potom nulový vektor je kolmý na nenulový (alebo nulový) vektor?
V. Nulový vektor je kolmý na ľubovoľný iný vektor.

Ako nájsť taký vektor (určiť súradnice), ktorý je kolmý na daný vektor?
Daný je vektor $\vec{a}$ súradnicami: $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Keby sme už poznali ten vektor $\vec{b} = (b_1; b_2)$, ich skalárny súčin by bol nulový.

$$\vec{a}.\vec{b} = 0$$

$$a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$$

Keby som násobil tie isté čísla (vymenil by som súradnice vektora $\vec{a}$): $b_1 = a_2$ a $b_2 = a_1$, dostal by som dvojnásobnú hodnotu:

$a_1.a_2 + a_2.a_1 = 2.a_1.a_2$

Ale ak jedno znamienko zmením: $b_2 = -a_1$, potom druhý súčin bude opačný:

$a_1.a_2 + a_2.(-a_1) = a_1.a_2 – a_2.a_1 = 0$

V. Nech je daný vektor súradnicami $\vec{a} = (a_1; a_2)$. Potom vektor kolmý na tento daný vektor dostanem, ak vymením súradnice a zmením jedno znamienko.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{b} = (a_2; -a_1)$ alebo $\vec{b} = (-a_2; a_1)$

Vynásobme vektor so sebou – skalárny súčin. Dostaneme druhú mocninu veľkosti vektora.

$\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = a_1.a_1 + a_2.a_2 = a_1^2 + a_2^2 = |\vec{a}|^2$

príklad:

Vypočítajte skalárny súčin vektorov:

a, $\vec{a} = (5; 4)$; $\vec{b} = (-2; 7)$ b, $\vec{c} = (-1; -3)$; $\vec{d} = (-4; 2)$ c, $\vec{e} = (12; 11)$; $\vec{f} = (-3; 3)$

d, $\vec{g} = (6; -4)$; $\vec{h} = (2; 3)$ e, $\vec{i} = (1; -1)$; $\vec{j} = (-1; 1)$ f, $\vec{k} = (3; -5)$; $\vec{l} = (4; 3)$

a, $\vec{a}.\vec{b} = 5.(-2) + 4.7 = -10 + 28 = 18$

b, $\vec{c}.\vec{d} = -1.(-4) + (-3).2 = 4 – 6 = -2$

c, $\vec{e}.\vec{f} = 12.(-3) + 11.3 = -36 + 33 = -3$

d, $\vec{g}.\vec{h} = 6.2 + (-4).3 = 12 – 12 = 0$

e, $\vec{i}.\vec{j} = 1.(-1) + (-1).1 = -1 – 1 = -2$

f, $\vec{k}.\vec{l} = 3.4 + (-5).3 = 12 – 15 = -3$

Napíšte súradnice vektora kolmého na daný vektor:

a, $\vec{a} = (6; 5)$ b, $\vec{c} = (-3; 7)$ c, $\vec{e} = (8; -13)$ d, $\vec{g} = (-4; -9)$

a, $\vec{b} \perp \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (5; -6)$

b, $\vec{d} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{d} = (7; 3)$

c, $\vec{f} \perp \vec{e} \Rightarrow \vec{f} = (13; 8)$

d, $\vec{h} \perp \vec{g} \Rightarrow \vec{h} = (9; -4)$

Určte chýbajúcu súradnicu vektora, aby skalárny súčin vychádzal na danú hodnotu:

a, $\vec{a} = (3; -2)$; $\vec{b} = (b_1; 5)$; $\vec{a}.\vec{b} = 8$ b, $\vec{c} = (4; 6)$; $\vec{d} = (-2; d_2)$; $\vec{c}.\vec{d} = -5$

c, $\vec{e} = (1; e_2)$; $\vec{f} = (12; 9)$; $\vec{e}.\vec{f} = 27$ d, $\vec{g} = (g_1; 6)$; $\vec{h} = (1; -2)$; $\vec{g}.\vec{h} = -4$

a, $\vec{a}.\vec{b} = 3.b_1 + (-2).5 = 3b_1 – 10$

$3b_1 – 10 = 8$ /+10

$3b_1 = 18$ /:3

$b_1 = 6$

b, $\vec{c}.\vec{d} = 4.(-2) + 6.d_2 = -8 + 6d_2$

$-8 + 6d_2 = -5$ /+8

$6d_2 = 3$ /:6

$d_2 = \frac{1}{2}$

c, $\vec{e}.\vec{f} = 1.12 + e_2.9 = 12 + 9e_2$

$12 + 9e_2 = 27$ /-12

$9e_2 = 15$ /:9

$e_2 = \frac{5}{3}$

d, $\vec{g}.\vec{h} = g_1.1 + 6.(-2) = g_1 - 12$

$g_1 - 12 = -4 \qquad /+12$

$g_1 = 8$