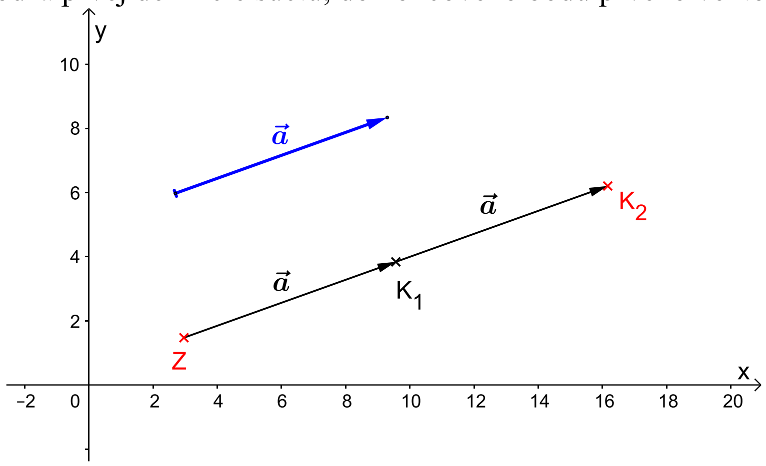
Násobenie vektora číslom

Násobme vektor číslom. Môžeme? A ak sa dá, čo bude výsledkom? Miešame rôzne typy matematických objektov, preto výsledok nie je jednoznačný. Ale ak trošku rozmýšľame, hľadáme podobný súčin, môžeme prísť na odpoveď.
Násobíme uhol číslom → výsledok: uhol. Násobíme vektor číslom (skalárnou veličinou – skalárom) → výsledok: vektor?
Čomu sa rovná $2.\vec{a}$? Ak to vyjadrím súčtom (pri číslach sme to robili → 4.7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28): $2.\vec{a} = \vec{a} + \vec{a}$, ich súčet už viem určiť. Podľa prvej definície súčtu, do koncového bodu prvého vektora umiestnime druhý.



Dostali sme vektor rovnobežný s pôvodným vektorom, s dvojnásobnou veľkosťou a rovnakým smerom. Ak takto pokračujeme, prídeme na to, že násobením vektora číslom dostaneme vektor, ktorý bude rovnobežný s daným vektorom. Ešte treba upresniť: čo ak číslo je desatinné, alebo je záporné.

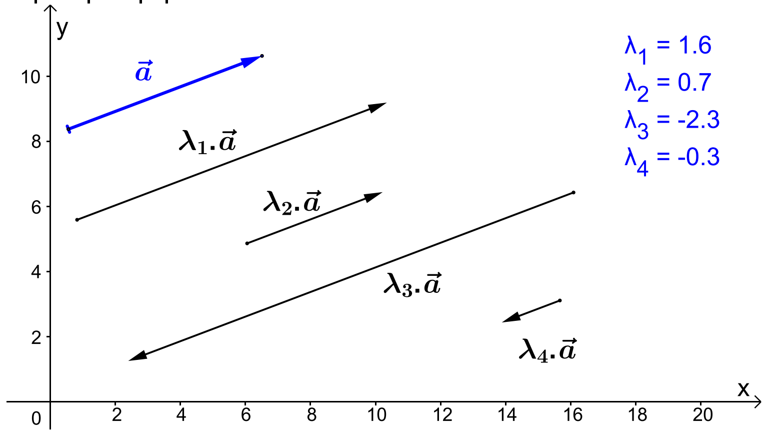
D. Ak ***násobíme vektor číslom***, dostaneme rovnobežný vektor. Veľkosť vynásobeného vektora dostaneme, ak veľkosť pôvodného vektora vynásobíme s absolútnou hodnotou čísla (musíme dostať nezápornú hodnotu). Smer nového vektora podľa toho bude rovnaký alebo opačný, či to číslo, ktorým násobíme, je kladné alebo záporné.

P. Z definície vyplýva, že rovnobežnosť vektorov môžeme dokázať alebo vyvrátiť hľadaním čísla, ktorým ak vynásobím jeden, dostanem ten druhý.

V. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}: \lambda.\vec{a} = \vec{b}$

P. Z definície vyplýva aj to, že ak násobíme číslom v absolútnej hodnote väčším ako jedna (samotné číslo je buď väčšie ako jedna, alebo menšie ako mínus jedna), výsledný vektor bude dlhší. Ak násobíme číslom, ktoré má absolútnu hodnotu menšiu ako jedna (medzi mínus jedna a jedna), potom dostaneme kratší vektor.

$$\lambda.\vec{a} \begin{cases} |\lambda| > 1 & \Rightarrow \quad |\lambda.\vec{a}| > |\vec{a}| \\ |\lambda| < 1 & \Rightarrow \quad |\lambda.\vec{a}| < |\vec{a}| \end{cases}$$



V. Ak je daný vektor a dané číslo, súradnice vektora vynásobeného týmto číslom dostanem, ak vynásobím jednotlivé súradnice s číslom.

$\lambda.\vec{a} = (\lambda.a_1; \lambda.a_2)$

P. V priestore: $\lambda.\vec{a} = (\lambda.a_1; \lambda.a_2; \lambda.a_3)$

P. *Opačný vektor* dostanem, ak vektor násobím číslom -1.

$-1.\vec{a} = (-a_1; -a_2)$

P. *Jednotkový vektor* dostanem, ak vektor (alebo opačný vektor) delím s jeho veľkosťou (násobím s prevrátenou hodnotou veľkosti).

$$\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}; \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right) \qquad \text{alebo} \qquad \overrightarrow{a_0'} = \frac{-\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{-a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}; \frac{-a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}}\right)$$

V. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

$(\lambda + \mu).\ \vec{a} = \lambda.\ \vec{a} + \mu.\ \vec{a}$

$\lambda.(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda.\ \vec{a} + \lambda.\vec{b}$

$\lambda.(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu).\ \vec{a}$

príklad:

Daný je vektor $\vec{a} = (5; -12)$. Vypočítajte súradnice jednotkového vektora rovnobežného s vektorom $\vec{a}$.

vypočítame najprv veľkosť vektora

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$

vektor delíme s touto veľkosťou

$\overrightarrow{a_0} = \frac{\vec{a}}{13} = \frac{(5;-12)}{13}$

$\overrightarrow{a_0} = \left(\frac{5}{13}; \frac{-12}{13}\right)$

$\overrightarrow{a_0'} = \left(\frac{-5}{13}; \frac{12}{13}\right)$

urobme skúšku – vypočítajme veľkosť

$|\overrightarrow{a_0}| = \sqrt{\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169} + \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{169}{169}} = \sqrt{1} = 1$

Zistite, či tri body ležia v jednej priamke: A(-3; 6); B(3; -2); C(1; -4).

vytvoríme dva vektory z troch bodov, a skúsime dokázať, že sú rovnobežné

vypočítame najprv súradnice vektorov

$\vec{k} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3; -2) - (-3; 6) = (6; -8)$

$\vec{l} = \overrightarrow{AC} = C - A = (1; -4) - (-3; 6) = (4; -10)$

ak sú rovnobežné, môžeme nájsť číslo, ktorým ak vynásobím jeden, dostanem druhý

$?\ \exists\ \lambda\colon \lambda.\vec{k} = \vec{l}$

$\lambda.(6; -8) = (4; -10)$

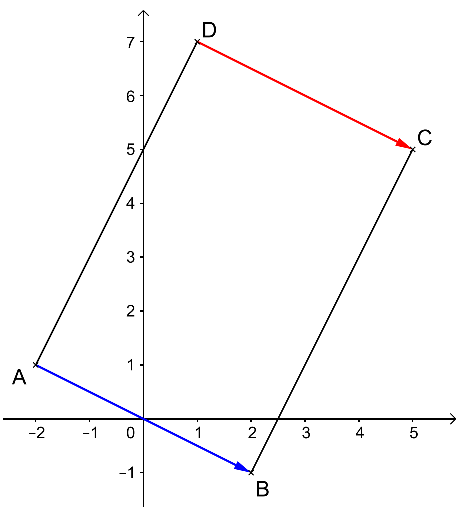
$$(\lambda.6; \lambda.(-8)) = (4; -10) \Leftrightarrow \begin{cases} 6\lambda = 4 & \rightarrow \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \lambda \\ -8\lambda = -10 & \rightarrow \quad \frac{-10}{-8} = \frac{5}{5} = \lambda' \end{cases}$$

$\lambda \neq \lambda'$

čo z toho nám vyplýva → dostali sme dve rôzne hodnoty, čiže sme nenašli jednu λ

Body A, B a C nie sú kolineárne.

Daný je obdĺžnik ABCD. Poznáme vrcholy: A(-2; 1); B(2; -1); D(1; 7). Určte súradnice chýbajúcemu bodu C.



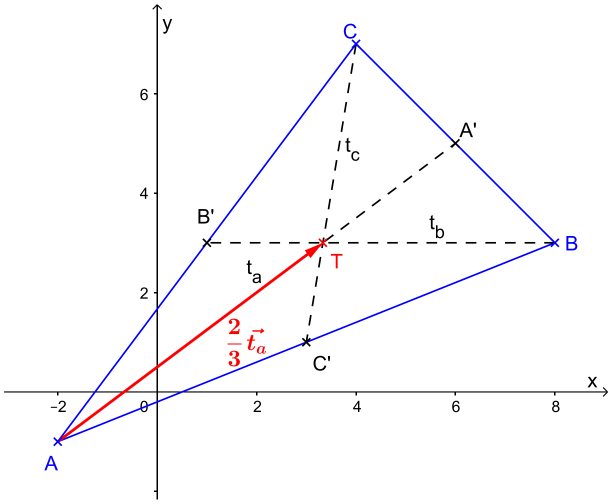
vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{DC}$ sú rovnaké – vypočítame súradnice

$\overrightarrow{AB}$ = B – A = (2; -1) – (-2; 1) = (4; -2)

$\overrightarrow{DC}$ = C – D $\rightarrow$ C = $\overrightarrow{DC}$ + D = (4; -2) + (1; 7)

C = (5; 5)

Daný je trojuholník ABC vrcholmi: A(-2; -1); B(8; 3); C(4; 7). Určte súradnice ťažiska.



ťažisko delí ťažnice na tretiny: dve tretiny ťažnice je časť pri vrchole, jedna tretina pri strane

určíme stred strany a, potom napíšeme vektor $\overrightarrow{AA'}$

$A' = \frac{B+C}{2} = \left(\frac{8+4}{2}; \frac{3+7}{2}\right) = (6; 5)$

$\overrightarrow{AA'}$ = A' – A = (6; 5) – (-2; -1) = (8; 6)

vypočítame dve tretiny vektora

$\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} = \frac{2}{3}.(8; 6) = \left(\frac{2}{3}.8; \frac{2}{3}.6\right) = \left(\frac{16}{3}; 4\right)$

$\overrightarrow{AT} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

$\overrightarrow{AT} = T - A \rightarrow T = \overrightarrow{AT} + A = \left(\frac{16}{3}; 4\right) + (-2; -1)$

$T = \left(\frac{10}{3}; 3\right)$

V. Ťažisko trojuholníka je aritmetickým priemerom vrcholov.

$$T = \frac{A+B+C}{3} = \left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$