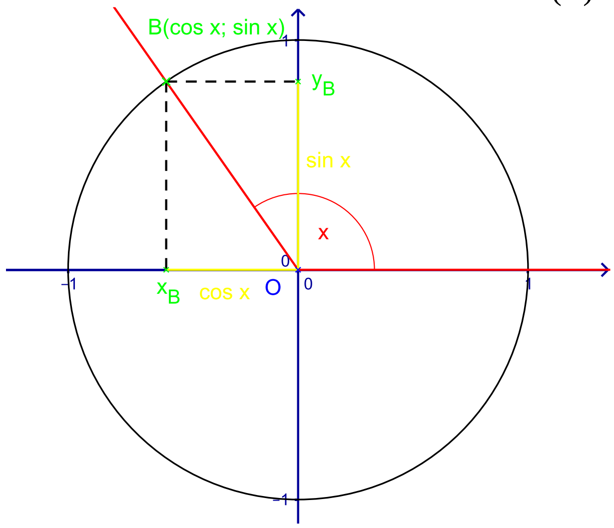
Goniometrické funkcie obecného uhla

Daný je orientovaný uhol x umiestnený do súradnicovej sústavy s vrcholom v začiatku sústavy a pevným ramenom na kladnej časti *x*-ovej osi. Ďalej je daná jednotková kružnica so stredom v začiatku sústavy. Voľné rameno orientovaného uhla pretne jednotkovú kružnicu v bode B.

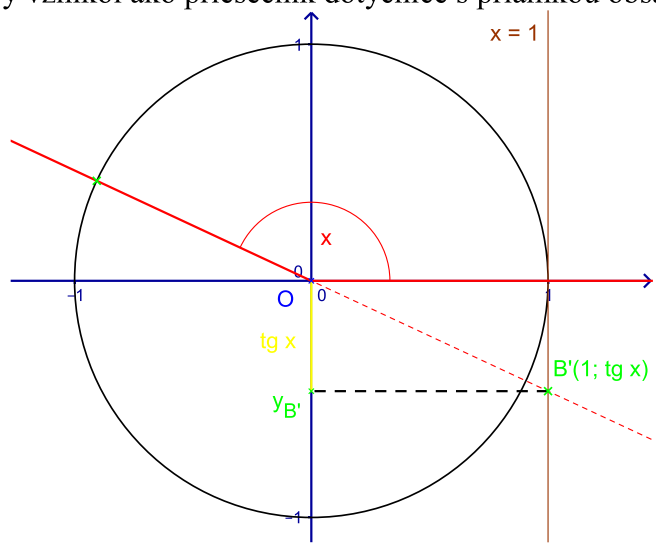
D. Pod ***sínus***om orientovaného uhla x rozumieme y-ovú súradnicu bodu (B) na jednotkovej kružnici.

D. Pod ***kosínus***om orientovaného uhla x rozumieme x-ová súradnicu bodu (B) na jednotkovej kružnici.



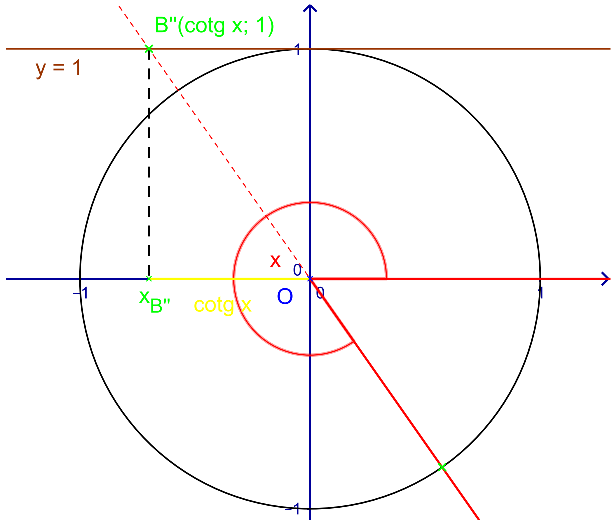
Predchádzajúce objekty doplníme s dotyčnicou k jednotkovej kružnici v bode (1; 0) – o priamku s rovnicou x = 1. Potom voľné rameno (alebo doplnené o opačnú polpriamku → na priamku obsahujúcu rameno) pretne dotyčnicu v bode B′.

D. Pod ***tangens***om orientovaného uhla x rozumieme y-ovú súradnica bodu (B′) na dotyčnici k jednotkovej kružnici s rovnicou x = 1, ktorý vznikol ako priesečník dotyčnice s priamkou obsahujúcou voľné rameno.



Teraz namiesto zvislej dotyčnice doplníme pôvodné objekty s dotyčnicou k jednotkovej kružnici v bode (0; 1) – o priamku s rovnicou y = 1. Potom voľné rameno (alebo doplnené o opačnú polpriamku → na priamku obsahujúcu rameno) pretne dotyčnicu v bode B″.

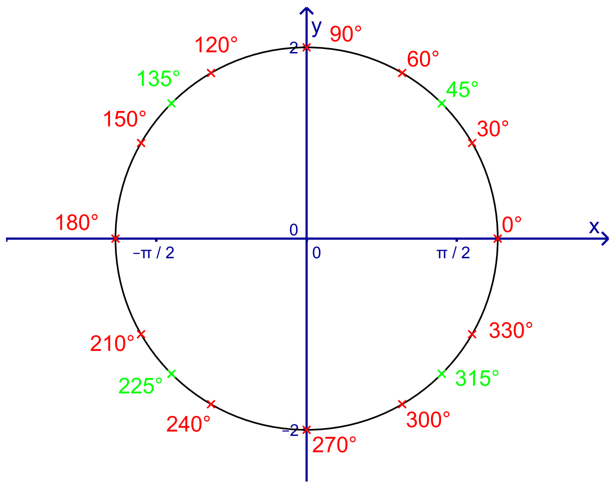
D. Pod ***kotangens***om orientovaného uhla x rozumieme x-ovú súradnica bodu (B″) na dotyčnici k jednotkovej kružnici s rovnicou y = 1, ktorý vznikol ako priesečník dotyčnice s priamkou obsahujúcou voľné rameno.



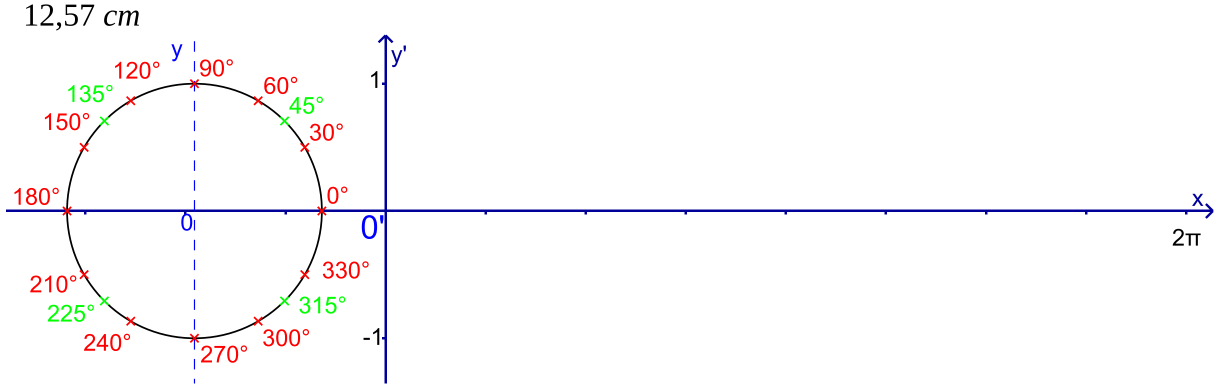
1. funkcia sínus

„konštrukcia“ grafu

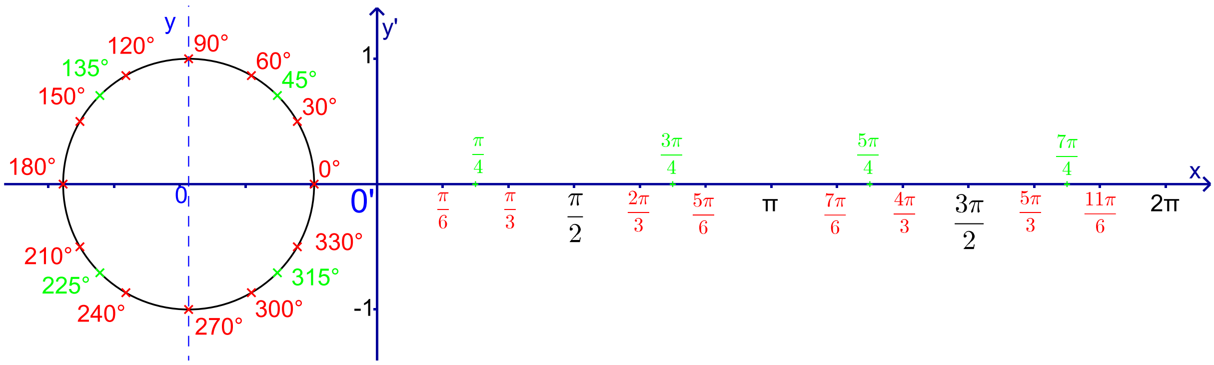
- umiestnime do súradnicovej sústavy jednotkovú kružnicu so stredom v začiatku – jednotku si zvolíme sami (napríklad s polomerom r = 2 *cm* konštrukcia sa ešte zmestí do zošita)
- najprv rozdelíme kružnicu po 30° $\left(\frac{\pi}{6}\ rad\right)$ + vyznačíme aj stredy štvrťrovín (kvadrantov) – to všetko iba na jednotkovej kružnici



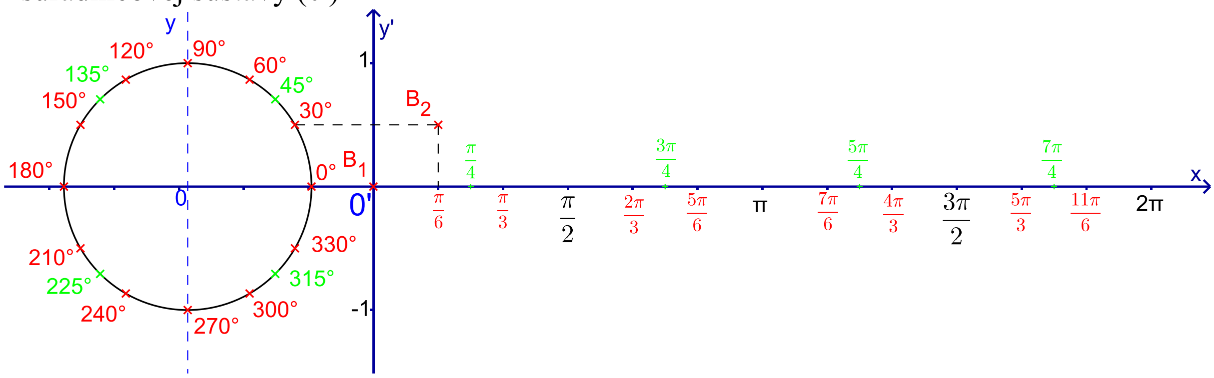
- potom urobíme posunutú súradnicovú sústavu: os x' je totožná s osou x; os y' je posunutá – napravo od kružnice
- na x-ovej osi sú uhly v oblúkovej miere – dĺžka kružnicového oblúka prislúchajúci k danému uhlu: pre r = 2 *cm* dĺžka kružnicového oblúka (tu obvod kružnice) dá vzdialenosť 2π.2 od začiatku (0') → 2π.2 = 12,57 *cm*



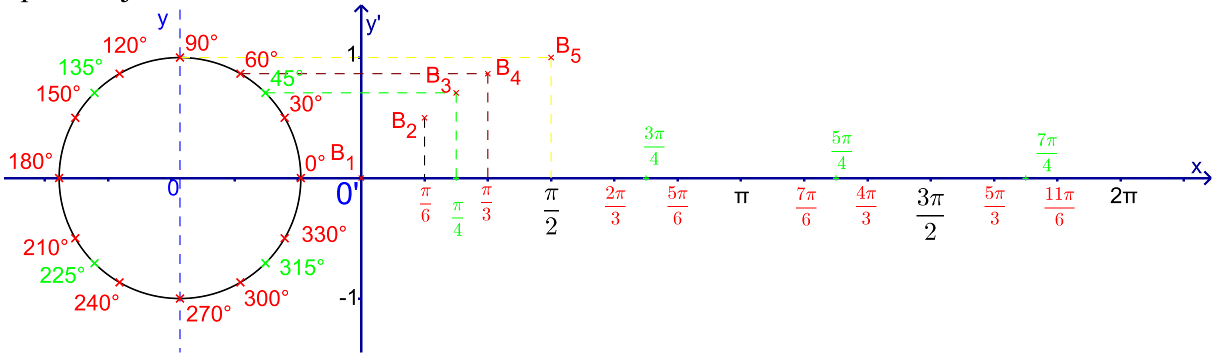
- úsečku 0'-2π rozdelíme na 12 rovnakých častí + stred medzi: $\frac{\pi}{6}$ a $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$ a $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{7\pi}{6}$ a $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$ a $\frac{11\pi}{6}$.

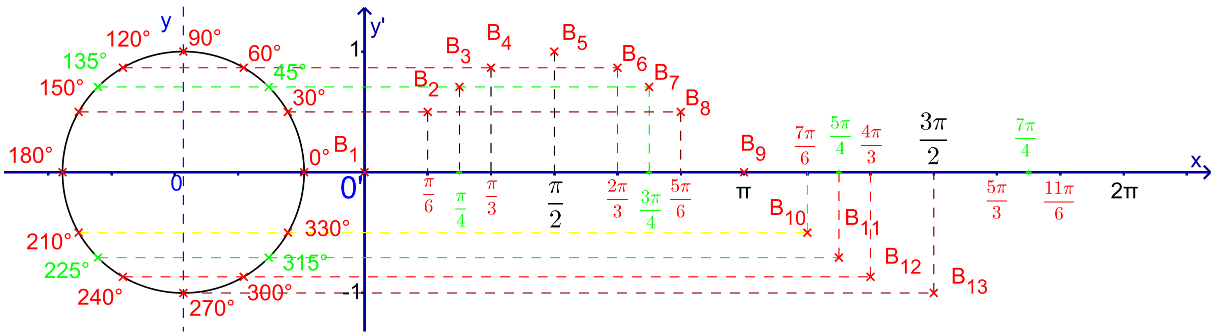


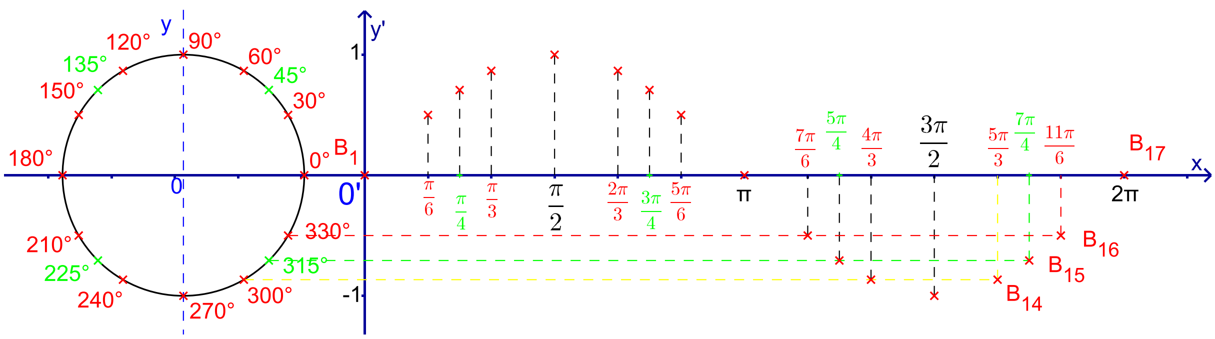
- nakoľko sínus orientovaného uhla x je y-ová súradnica bodu, takže v jednotlivých bodoch na x-ovej osi vynesieme vzdialenosť bodu na jednotkovej kružnici od x-ovej osi (rovnobežne z bodu s x-ovou osou nájdeme bod grafu)
- prvý bod patrí k 0°-u uhlu – nakoľko ten leží na x-ovej osi, bod B_1 je totožný so začiatkom posunutej súradnicovej sústavy (0')



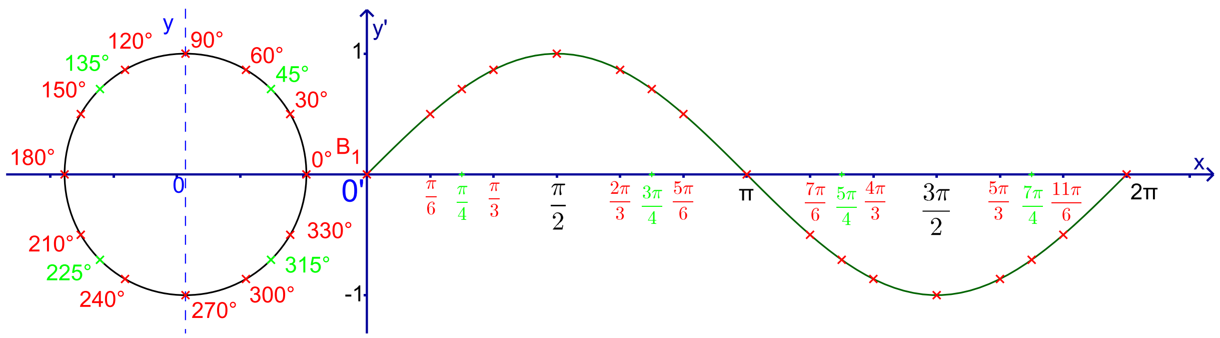
- pokračujeme s ďalšími bodmi



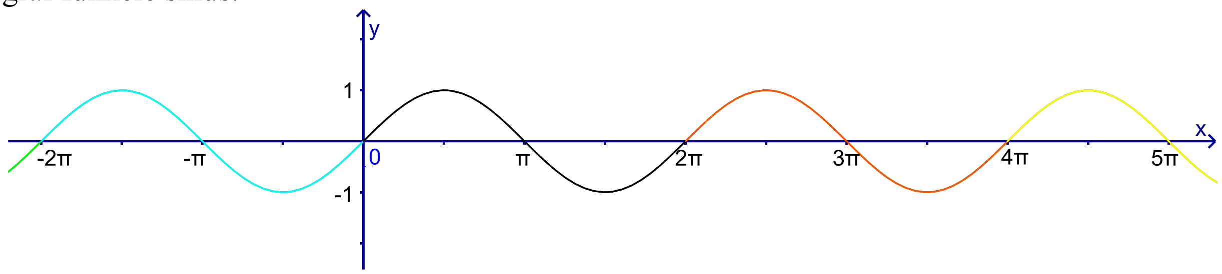




- a posledný krok: pospájame body krivkou



P. Keby sme pokračovali s orientovanými uhlami väčšími ako 360°, potom bod na jednotkovej kružnici pokračuje v pohybe a znovu a znovu prejde tú istú dráhu a opíše tú istú krivku. Podobne aj pri záporných uhloch. Takto vznikne graf funkcie sínus.



Je to nová vlastnosť niektorých funkcií, ktorú doteraz ani jedna funkcia nemala – funkčné hodnoty sa opakujú po nejakom úseku.

D. Funkcia f je ***periodická***, ak môžeme nájsť také kladné číslo $\boldsymbol{p}$ (perióda), že funkcia v bode x nadobudne rovnakú funkčnú hodnotu, ako o $\boldsymbol{p}$ ďalej.

$$\exists p > 0\colon \forall x \in D_f \Rightarrow f(x) = f(x+p)$$

Nakoľko pri periodických funkciách s opakujúcimi sa funkčnými hodnotami aj vlastnosti sa opakujú, stačí ak funkciu analyzujeme na jednej perióde (základná perióda: $\langle 0; 2\pi)$) – potom to môžeme rozšíriť na celý definičný obor funkcie.

$D_f = \mathbb{R}$

$H_f = \langle -1; 1\rangle$

G. sínusoida

M. $x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ m.↑

$x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ m.↓

N.B. $XY(0; 0)$; $X_1(\pi; 0)$; $X_2(2\pi; 0)$

Ext. v bode $x_1 = \frac{\pi}{2}$ má lokálne maximum

v bode $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ má lokálne minimum

Pá. funkcia je nepárna: $\sin(-x) = -\sin x$

Pe. funkcia je periodická a dĺžka periódy: $p = 2\pi = 360°$

ak rozšírime na celý definičný obor vlastnosti: $k \in \mathbb{Z}$

M. $x \in \left(\frac{(4k-1)\pi}{2}; \frac{(4k+1)\pi}{2}\right)$ m.↑

$x \in \left(\frac{(4k+1)\pi}{2}; \frac{(4k+3)\pi}{2}\right)$ m.↓

N.B. $X_k(k.\pi; 0)$

Ext. v bode $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k.\pi$ má lokálne maximum

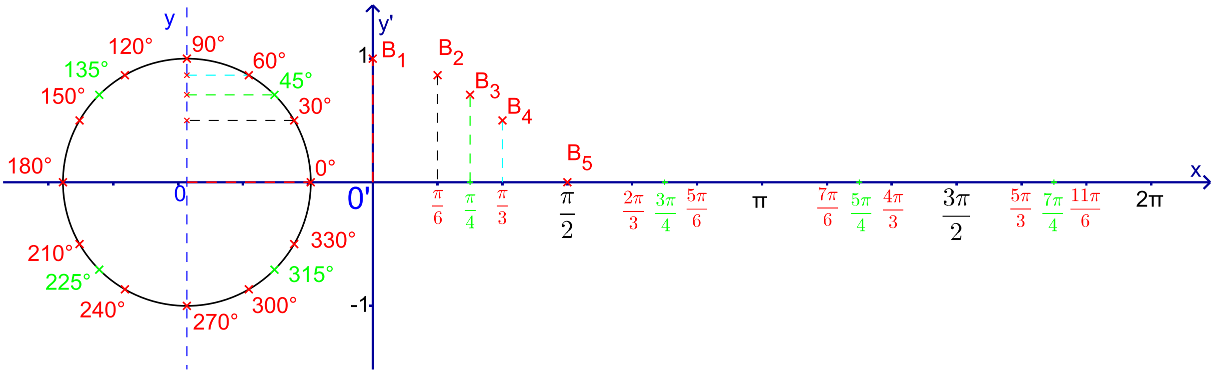
v bode $x_k = \frac{3\pi}{2} + 2k.\pi$ má lokálne minimum

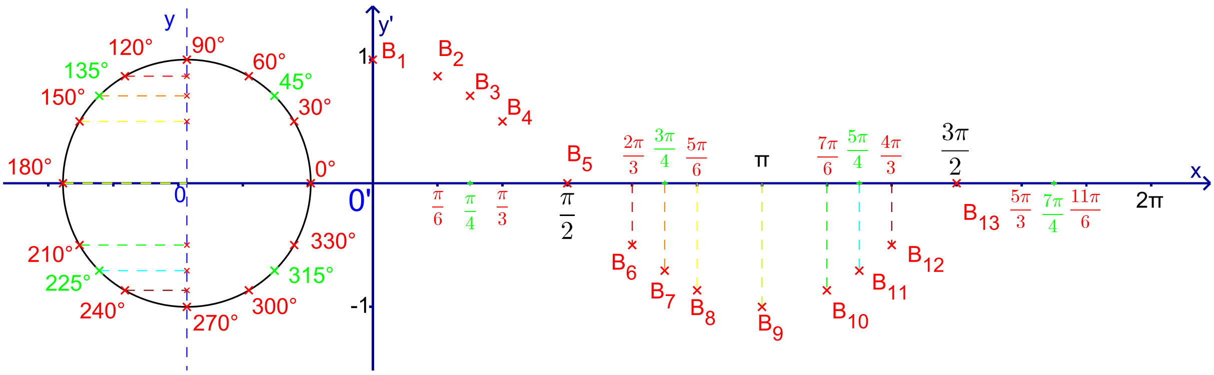
2. funkcia kosínus

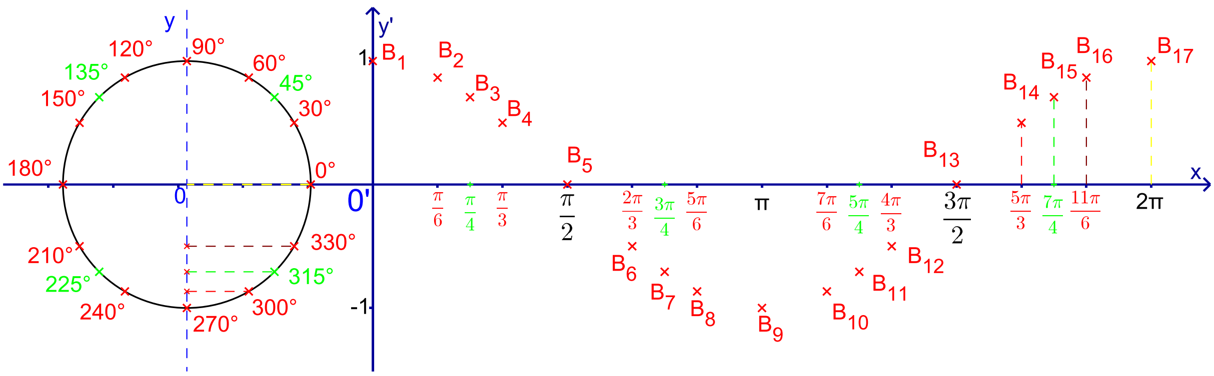
„konštrukcia“ grafu

- podobne postupujeme aj pri funkcii kosínus – rozdiel je iba vo vynášaní bodov
- nakoľko kosínus orientovaného uhla x je x-ová súradnica bodu na jednotkovej kružnici, preto tu v jednotlivých bodoch na x-ovej osi vynesieme vzdialenosť bodu na jednotkovej kružnici od y-ovej osi
  - ak bod je napravo od y-ovej osi (body 30°-60° a potom 300°-330°), vynesieme ho nad x-ovú os (B_1-B_4 a potom B_{14}-B_{17})

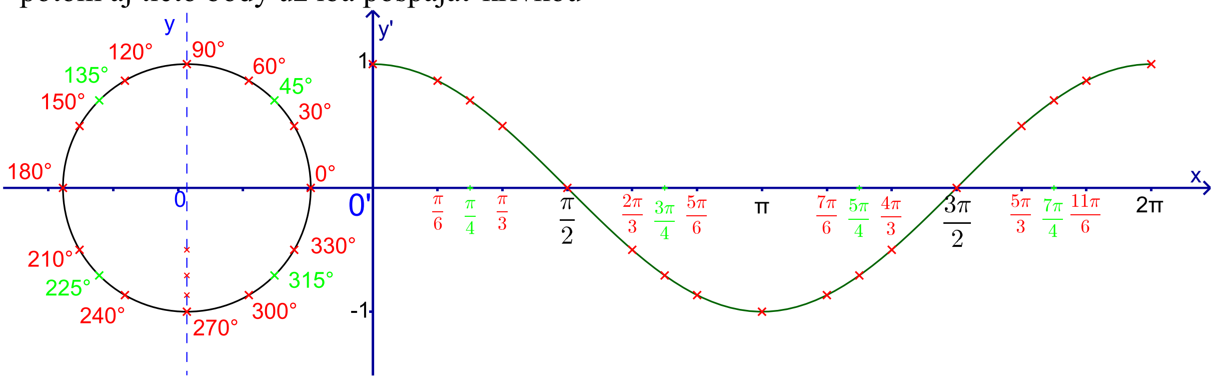
- ak bod je naľavo od y-ovej osi (body 120°-240°), vynesieme ho pod x-ovú os (B6-B12)



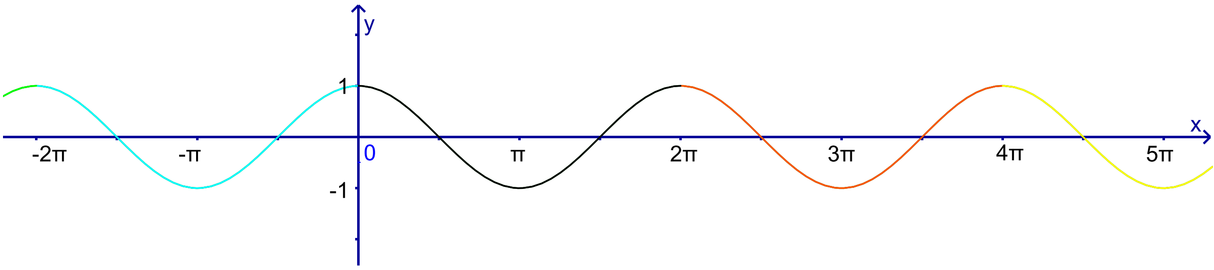




- potom aj tieto body už iba pospájať krivkou



- ani funkcia kosínus nekončí pri orientovanom uhle 360° – aj tu sa opakujú funkčné hodnoty a nimi aj krivka



vlastnosti na základnom intervale

$D_f = \mathbb{R}$
$H_f = \langle -1; 1 \rangle$
G. kosínusoida

M. x ∈ (0; π) m.↓

x ∈ (π; 2π) m.↑

N.B. $X_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$; $X_2\left(\frac{3\pi}{2}; 0\right)$

Y(0; 1)

Ext. v bode $x_1 = 0$ a $x_2 = 2\pi$ má lokálne maximum

v bode $x_3 = \pi$ má lokálne minimum

Pá. funkcia je párna: $\cos(-x) = \cos x$

Pe. funkcia je periodická a dĺžka periódy: $p = 2\pi = 360°$

ak rozšírime na celý definičný obor vlastnosti: $k \in \mathbb{Z}$

M. $x \in (2k.\pi; (2k+1).\pi)$ m.↓

$x \in ((2k-1).\pi; 2k.\pi)$ m.↑

N.B. $X_k\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi; 0\right)$

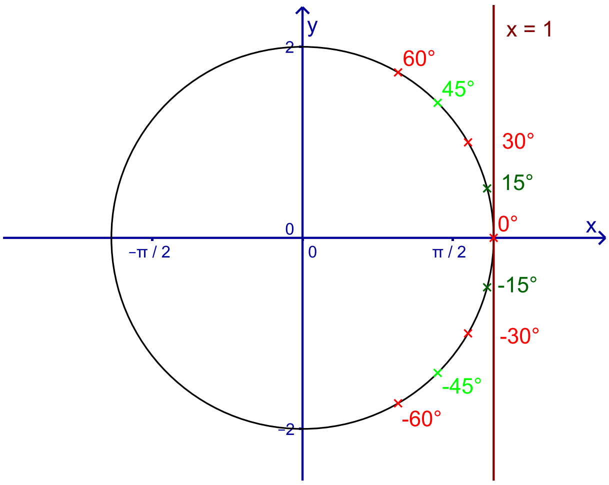
Ext. v bode $x_k = 2k.\pi$ má lokálne maximum

v bode $x_k = (2k+1).\pi$ má lokálne minimum

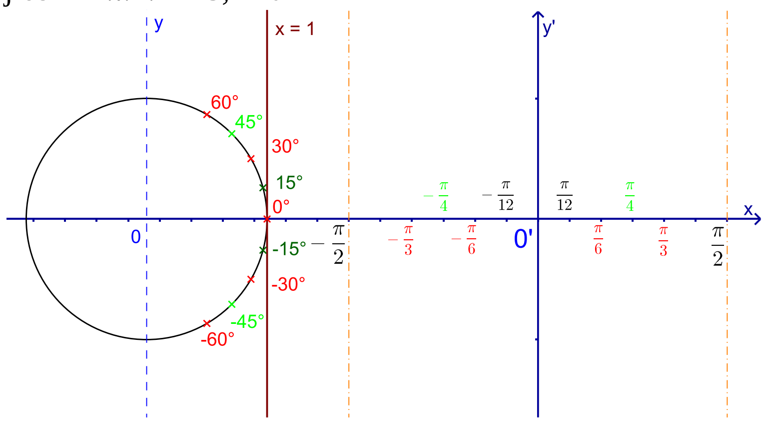
3. funkcia tangens

„konštrukcia" grafu

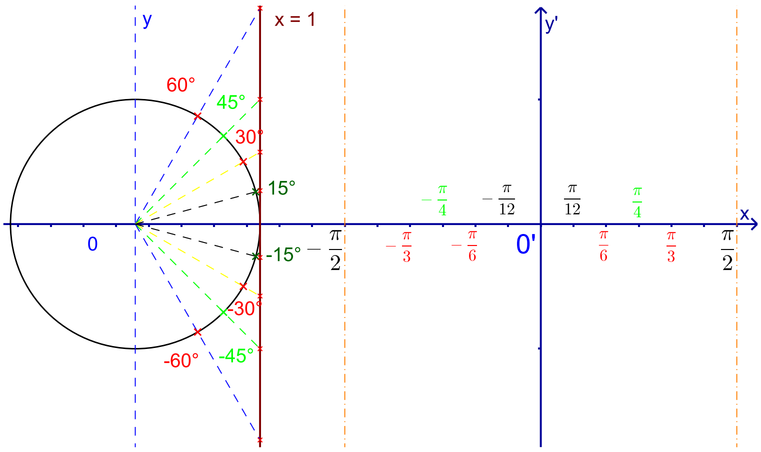
- umiestnime do súradnicovej sústavy jednotkovú kružnicu so stredom v začiatku a doplníme o dotyčnicu ku kružnici v bode (1; 0)
- potom rozdelíme pravú polovicu kružnice po 30° $\left(\frac{\pi}{6}\ rad\right)$ [od -60° do 60°] + vyznačíme stredy štvrťrovín (kvadrantov)
- ešte pridáme dva uhly 15° a -15°



- potom urobíme posunutú súradnicovú sústavu: os x' je totožná s osou x; os y' je posunutá – napravo od kružnice (vo väčšej vzdialenosti → *cca* 5-6 *cm*)
- na x-ovej osi sú uhly v oblúkovej miere – dĺžka kružnicového oblúka prislúchajúci k danému uhlu: pre r = 2 *cm* polkružnica dá vzdialenosť π, z čoho iba polovica tejto vzdialenosti pôjde na obidve strany posunutej y'-ovej osi → π.2:2 = 3,14 *cm*



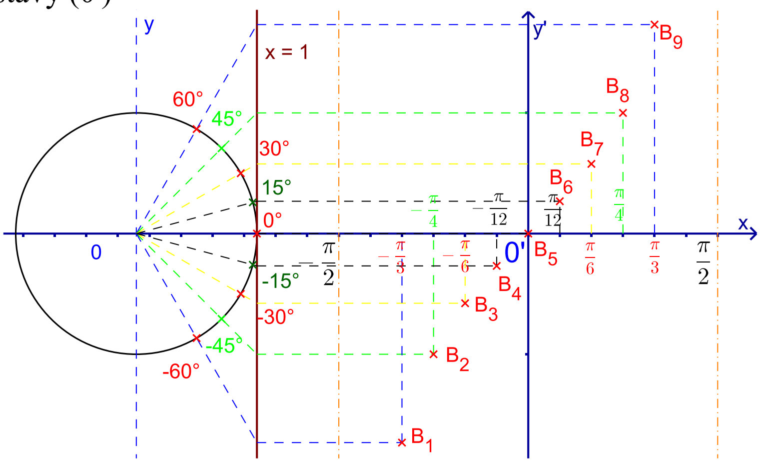
- pokračujeme s polpriamkami (úsečkami): z 0 bodmi na jednotkovej kružnici až po dotyčnicu x = 1



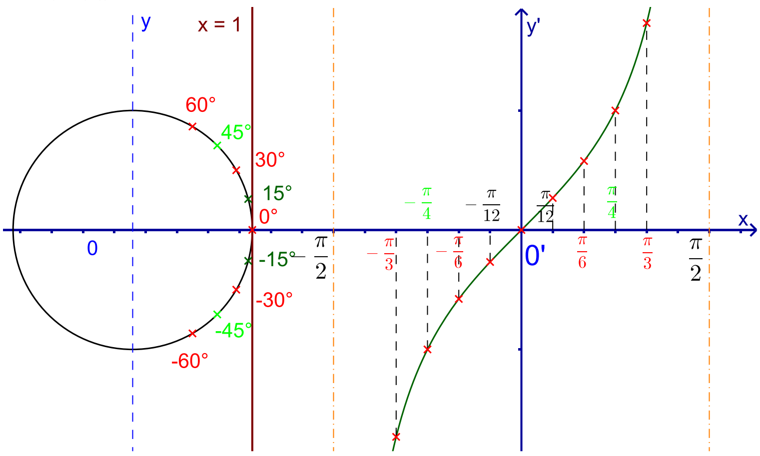
- nakoľko tangens orientovaného uhla x je y-ová súradnica bodu na dotyčnici, takže v jednotlivých bodoch na x-ovej osi vynesieme vzdialenosť bodu na priamke s rovnicou x = 1 od x-ovej osi (rovnobežne z bodu s x-ovou osou nájdeme bod grafu)

P. Pri orientovanom uhle 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ a -90° $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ voľné rameno je rovnobežné s dotyčnicou a preto nevznikne s ňou spoločný bod – neexistujúci bod ani y-ovú súradnicu nemá ⇒ tangens pre uhly -90°; 90°; 270°; 450°; … neexistuje → tie uhly chýbajú z definičného oboru funkcie

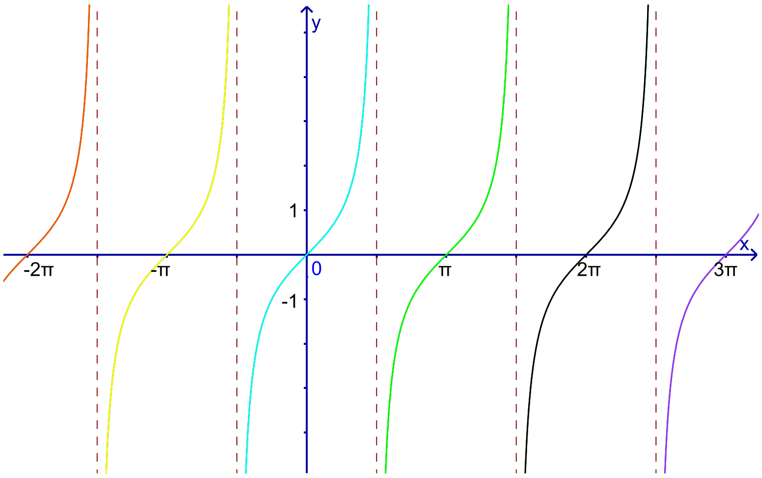
- piaty bod patrí k 0°-u uhlu – a nakoľko leží na x-ovej osi, bod B_5 je totožný so začiatkom posunutej súradnicovej sústavy (0')



- pospájame body krivkou



- ani funkcia tangens nekončí pri orientovanom uhle 90° – aj tu sa opakujú funkčné hodnoty a nimi aj krivka



vlastnosti na základnom intervale

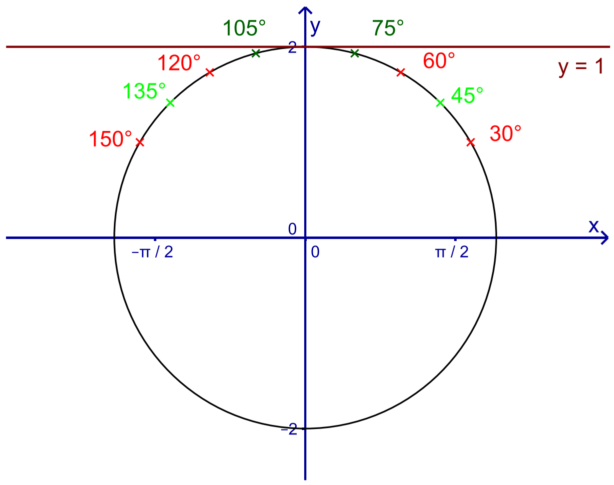
$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi\right\}$
$H_f = \mathbb{R}$
G. tangensoida
M. $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ m.↑
N.B. XY(0; 0)
Ext. nemá
Pá. funkcia je nepárna: tg $(-x) = -$tg x
Pe. funkcia je periodická a dĺžka periódy: $p = \pi = 180°$

ak rozšírime na celý definičný obor vlastnosti: $k \in \mathbb{Z}$
M. $x \in \left(\frac{(2k-1)\pi}{2}; \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$ m.↑
N.B. $X_k(k.\pi; 0)$

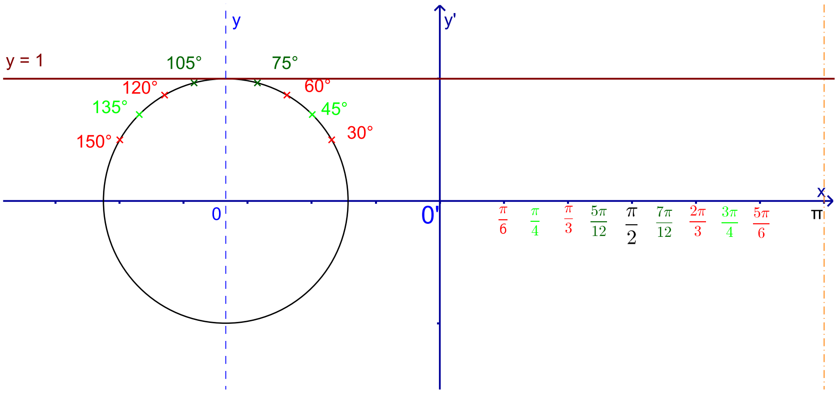
4. funkcia kotangens

„konštrukcia" grafu

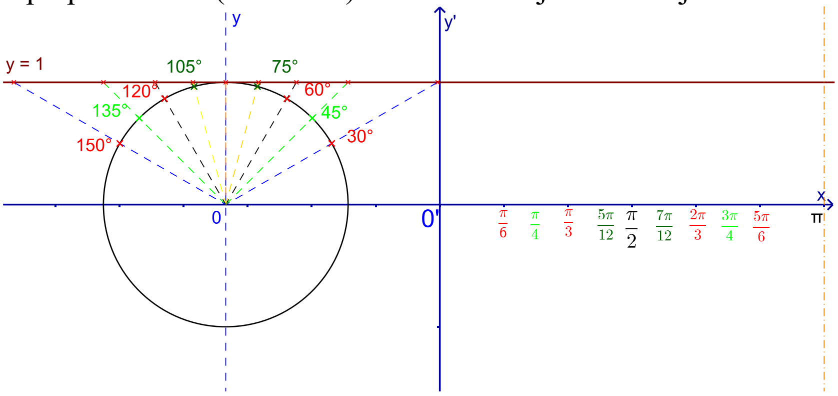
- umiestnime do súradnicovej sústavy jednotkovú kružnicu so stredom v začiatku a doplníme o dotyčnicu ku kružnici v bode (0; 1)
- potom rozdelíme hornú polovicu kružnice po (30°) $\frac{\pi}{6}$ radiánoch (od 30° do 150°) + vyznačíme stredy štvrťrovín
- ešte pridáme dva uhly 75° a 105°



- potom urobíme posunutú súradnicovú sústavu: os x' je totožná s osou x; os y' je posunutá – napravo od kružnice
- na x-ovej osi sú uhly v oblúkovej miere – dĺžka kružnicového oblúka prislúchajúci k danému uhlu: pre r = 2 *cm* polkružnica dá vzdialenosť π od začiatku (0') → π.2 = 6,28 *cm*



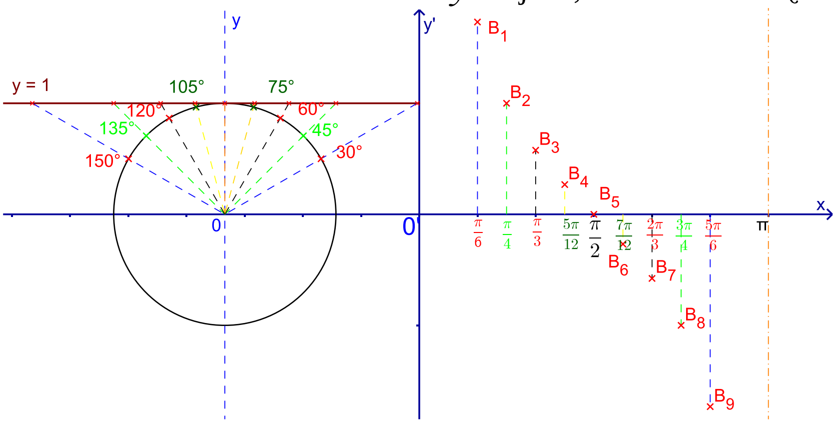
- pokračujeme s polpriamkami (úsečkami) z 0 bodmi na jednotkovej kružnici až po dotyčnicu y = 1



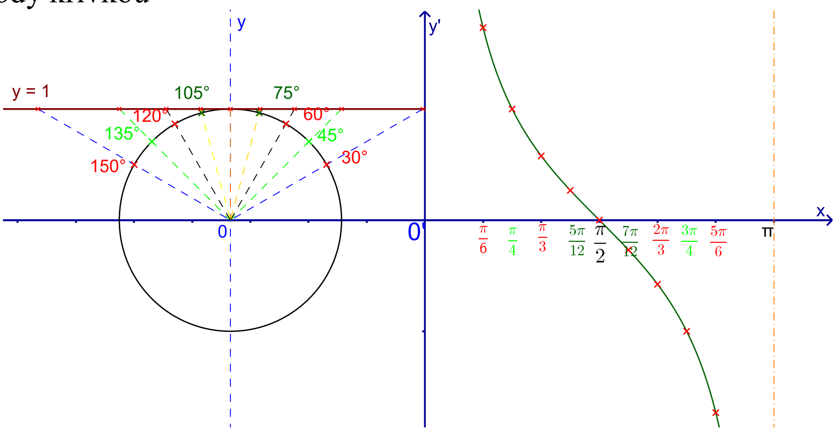
- nakoľko kotangens orientovaného uhla x je x-ová súradnica bodu na dotyčnici, preto tu v jednotlivých bodoch na *x*-ovej osi vynesieme vzdialenosť bodu na priamke s rovnicou y = 1 od *y*-ovej osi
  - ak bod je napravo od *y*-ovej osi (body 30°-75°), vynesieme ho nad *x*-ovú os (B_1-B_4)
  - ak bod je naľavo od *y*-ovej osi (body 105°-150°), vynesieme ho pod *x*-ovú os (B_6-B_9)

P. Pri orientovanom uhle 0° a 180° (π) voľné rameno je rovnobežné s dotyčnicou a preto nevznikne s ňou spoločný bod – neexistujúci bod ani x-ovú súradnicu nemá ⇒ kotangens pre uhly 0°; 180°; 360°; 540°; … neexistuje → tie uhly chýbajú z definičného oboru funkcie

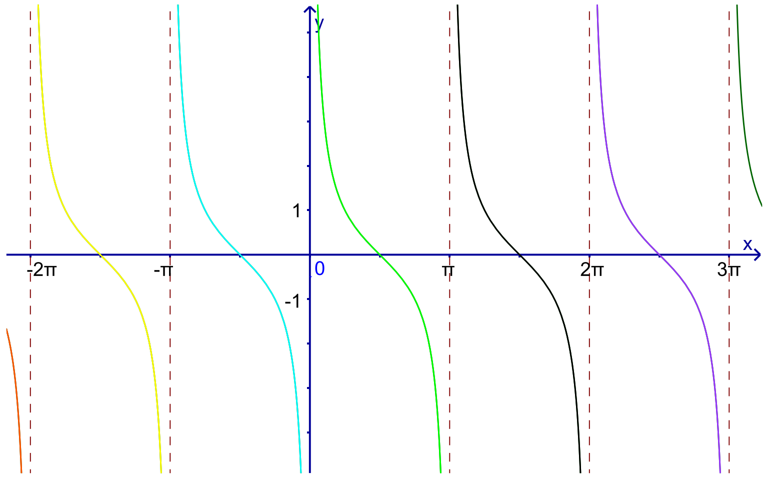
- piaty bod patrí k 90°-u uhlu – a nakoľko leží na *y*-ovej osi, bod B_5 leží na *x*-ovej osi



- pospájame body krivkou



- ani funkcia kotangens nekončí pri orientovanom uhle 180° – aj tu sa opakujú funkčné hodnoty a nimi aj krivka



vlastnosti na základnom intervale

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{k.\pi\}$
$H_f = \mathbb{R}$
G. kotangensoida
M. $(0; \pi)$ m.↓
N.B. $X_1\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$
Ext. nemá
Pá. funkcia je nepárna: $\text{cotg}\,(-x) = -\text{cotg}\,x$
Pe. funkcia je periodická a dĺžka periódy: $p = \pi = 180°$

ak rozšírime na celý definičný obor vlastnosti: $k \in \mathbb{Z}$
M. $x \in (k.\pi; (k+1)\pi)$ m.↓
N.B. $X_k\left(\frac{\pi}{2} + k.\pi; 0\right)$