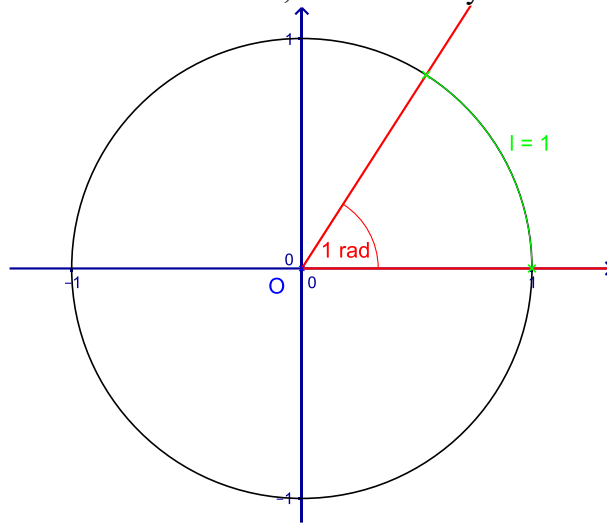


## Orientovaný uhol

**D.** Dve polpriamky so spoločným začiatkom (počiatočným bodom) rozdelia rovinu na dve časti. Jedna je vnútrajšok uhla (vnútorné body), druhá je vonkajšok uhla (vonkajšie body). Polpriamky sú **ramená uhla**, a spoločný začiatok sa volá **vrchol uhla**.

**D. (stupňová miera)** Uhol má veľkosť  $1^\circ$ , ak 90 násobok je pravý uhol.

**D. (oblúčková miera – radiány)** Uhol má veľkosť 1 rad, ak kružnicový oblúk má rovnakú dĺžku ako polomer.



Ako prejsť zo stupňov na radiány a naopak? Plný uhol (celý kruh) má  $360^\circ$ . Dĺžka jednotkovej kružnice je obvod kružnice pre  $r = 1$ .

$$o = 2\pi \cdot r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$$

Čiže  $360^\circ$  uhlu zodpovedá  $2\pi$  rad. Takže  $180^\circ = \pi$  rad. Z toho dostaneme vzťah:

$$x \text{ [rad]} = \frac{\alpha [^\circ]}{180^\circ} \cdot \pi \text{ rad}$$

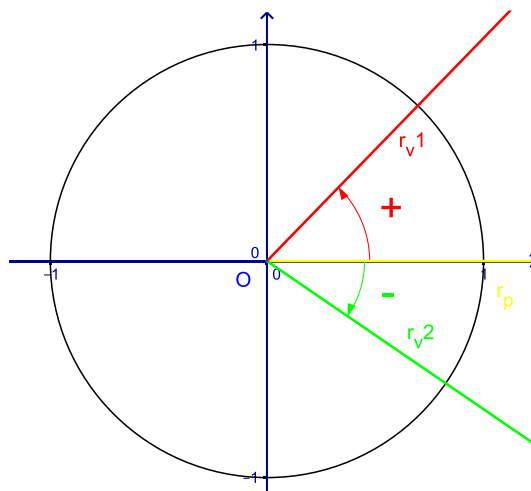
$$\alpha [^\circ] = \frac{x \text{ [rad]} \cdot 180^\circ}{\pi \text{ rad}}$$

$$1 \text{ rad} = 57^\circ 17' 44,806 247''$$

$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$	$105^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$165^\circ$	$180^\circ$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	$\pi$
$195^\circ$	$210^\circ$	$225^\circ$	$240^\circ$	$255^\circ$	$270^\circ$	$285^\circ$	$300^\circ$	$315^\circ$	$330^\circ$	$345^\circ$	$360^\circ$
$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	$2\pi$

**D.** Umiestnime náš uhol do súradnicovej sústavy. Vrchol nech je v začiatku súradnicovej sústavy, jedno rameno (pevné rameno) totožné s kladnou časťou  $x$ -ovej osi. Na začiatku aj druhé rameno (voľné/voľne hýbajúce sa rameno) je spolu s pevným ramenom. Ešte potrebujeme jednotkovú kružnicu (polomer sa rovná 1) so stredom v začiatku súradnicovej sústavy.

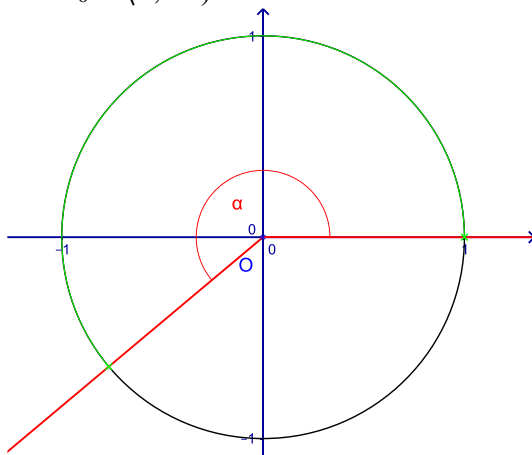
Potom sa začneme hýbať s voľným ramenom. Podľa toho dostane orientovaný uhol kladné alebo záporné znamienko, či smer pohybu voľného ramena je proti chodu hodinových ručičiek (kladný uhol) alebo v smere (záporný uhol).



Pohyb voľného ramena môže pokračovať po dosiahnutí plného uhla – tak dostaneme uhly väčšie ako  $360^\circ$  ( $2\pi$ ). Ak viackrát obíde voľné rameno celý kruh, toľkonásobok  $360^\circ$ -ho ( $2\pi$  radiánového) uhla pripočítame (alebo ak sa hýbe v zápornom smere, tak záporný násobok).

Ak zastane rameno, vznikne uhol. Z pohľadu na uhol nevieme, koľkokrát obišlo rameno celý kruh, ani znamienko (že v akom smere sa hýbalo). Ale dokážeme určiť uhol zodpovedajúci k tomu orientovanému uhlu zo základného intervalu.

**základný interval:**  $\alpha_0 \in \langle 0; 360^\circ \rangle$  alebo  $x_0 \in \langle 0; 2\pi \rangle$



Takže náš uhol na obrázku má  $\alpha_0 = 220^\circ$  alebo  $x_0 = 3,840$  rad.

Ale takisto mohol byť uhol:

$$\alpha_1 = 1.360^\circ + 220^\circ = 580^\circ$$

$$\alpha_2 = 3.360^\circ + 220^\circ = 1\,300^\circ$$

$$\alpha_3 = 9.360^\circ + 220^\circ = 3\,460^\circ$$

$$\alpha_4 = -1.360^\circ + 220^\circ = -140^\circ$$

$$\alpha_5 = -4.360^\circ + 220^\circ = -1\,220^\circ \dots$$

$$x_1 = 1.2\pi + 3,840 \text{ rad} = 10,123 \text{ rad}$$

$$x_2 = 3.2\pi + 3,840 \text{ rad} = 22,689 \text{ rad}$$

$$x_3 = 9.2\pi + 3,840 \text{ rad} = 60,388 \text{ rad}$$

$$x_4 = -1.2\pi + 3,840 \text{ rad} = -2,443 \text{ rad}$$

$$x_5 = -4.2\pi + 3,840 \text{ rad} = -21,293 \text{ rad} \dots$$

Takto sme rozšírili pojem uhla na všetky reálne čísla. Každý uhol môžeme vyjadriť ako celý násobok plného uhla (koľkokrát obíde voľné rameno  $360^\circ$ -ý uhol) plus uhol zo základného intervalu:

$$\alpha = z.360^\circ + \alpha_0 \quad z \in \mathbb{Z} \wedge \alpha_0 \in \langle 0; 360^\circ \rangle \text{ v stupňoch, alebo}$$

$$x = z.2\pi + x_0 \quad z \in \mathbb{Z} \wedge \alpha_0 \in \langle 0; 2\pi \rangle \text{ v radiánoch.}$$

Ako určiť uhol zo základného intervalu najjednoduchším spôsobom?

$$2\,873^\circ = z.360^\circ + \alpha_0$$

vydelíme 360-mi

$$2\,873:360 = 7,981$$

celá časť (ak ide o kladný uhol) bude z

odčítame od podielu celú časť

$$7,981 - 7 = 0,981$$

zvyšok vynásobíme 360-mi (poprípade zaokrúhlime  $\Leftarrow$  presnosť kalkulačky)

$$0,981.360 = 353$$

táto hodnota je ten hľadaný uhol zo základného intervalu  $\rightarrow$  teraz už môžeme písať:

$$2\,873^\circ = 7.360^\circ + 353^\circ$$

**P.** Ak sme správne počítali, po vypočítaní pravej strany má vyjsť presne ten pôvodný uhol.

Čo, ak je uhol záporný?

$$-3\,127^\circ = z.360^\circ + \alpha_0$$

vydelíme 360-mi

$$-3\,127:360 = -8,686$$

tak pripočítame prirodzené číslo, aby súčet bol kladný a menší ako 1

$$-8,686 + 9 = 0,314$$

toto prirodzené číslo je opačné číslo k číslu z (čiže koeficient bude -z)

zvyšok vynásobíme 360-mi (poprípade zaokrúhlime  $\Leftarrow$  presnosť kalkulačky)

$$0,314.360 = 113$$

táto hodnota je ten hľadaný uhol zo základného intervalu  $\rightarrow$  teraz už môžeme písať:

$$-3 \cdot 127^\circ = -9.360^\circ + 113^\circ$$

Čo, ak je uhol v oblúkovej miere (radiánoch)?

$$372,13 \text{ rad} = z \cdot 2\pi + x_0$$

vydelíme s  $2\pi$

$$372,13 : (2\pi) = 59,226$$

celá časť (ak ide o kladný uhol) bude z

odčítame od podielu celú časť

$$59,226 - 59 = 0,226$$

zvyšok vynásobíme s  $2\pi$

$$0,226 \cdot 2\pi = 1,422$$

táto hodnota je ten hľadaný uhol zo základného intervalu  $\rightarrow$  teraz už môžeme písať:

$$372,13 \text{ rad} = 59 \cdot 2\pi + 1,422 \text{ rad}$$

So záporným uhlom v oblúkovej miere podobne postupujeme, ako pri stupňoch.

$$-17,42 \text{ rad} = z \cdot 2\pi + x_0$$

vydelíme s  $2\pi$

$$-17,42 : (2\pi) = -2,772$$

tak pripočítame prirodzené číslo, aby súčet bol kladný a menší ako 1

$$-2,772 + 3 = 0,228$$

toto prirodzené číslo je opačné číslo k číslu z (čiže koeficient bude -z)

zvyšok vynásobíme s  $2\pi$

$$0,228 \cdot 2\pi = 1,430$$

táto hodnota je ten hľadaný uhol zo základného intervalu  $\rightarrow$  teraz už môžeme písať:

$$-17,42 \text{ rad} = -3 \cdot 2\pi + 1,430 \text{ rad}$$