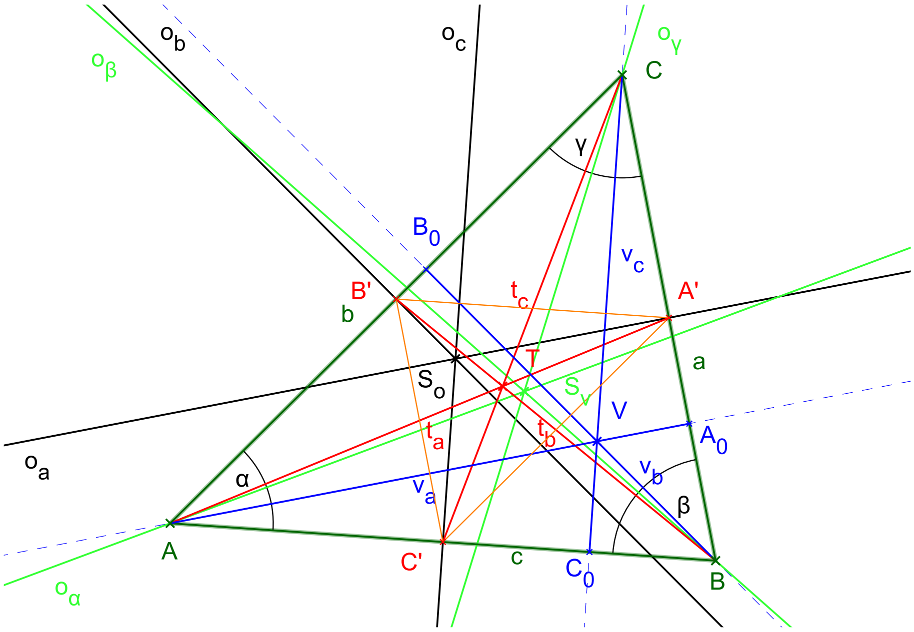
Obvod a obsah trojuholníka

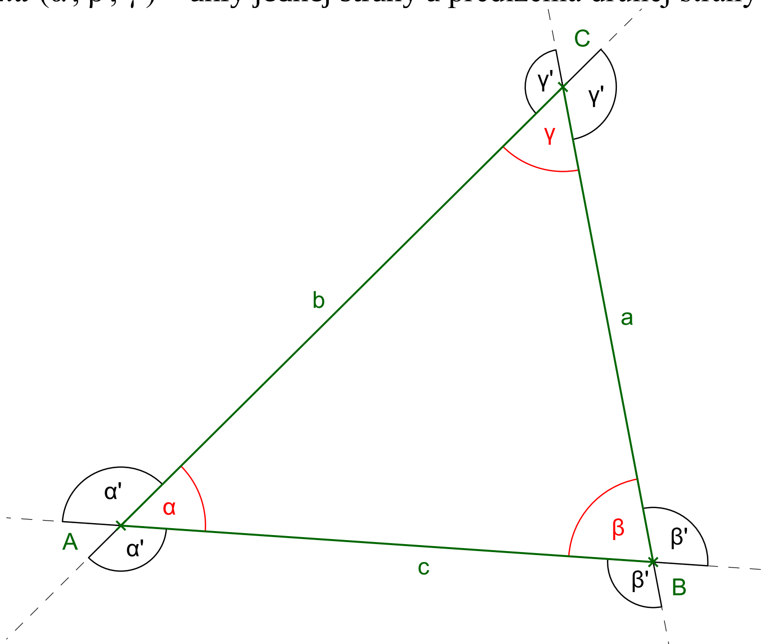
D. Tri nie kolineárne body (neležia na jednej priamke) tvoria jeden trojuholník. Tie body (A, B, C) sú vrcholy trojuholníka.



strany trojuholníka (a, b, c) – spojnice vrcholov

vnútorné uhly trojuholníka (α, β, γ) – uhly strán, kde vnútro uhla je vnútro trojuholníka

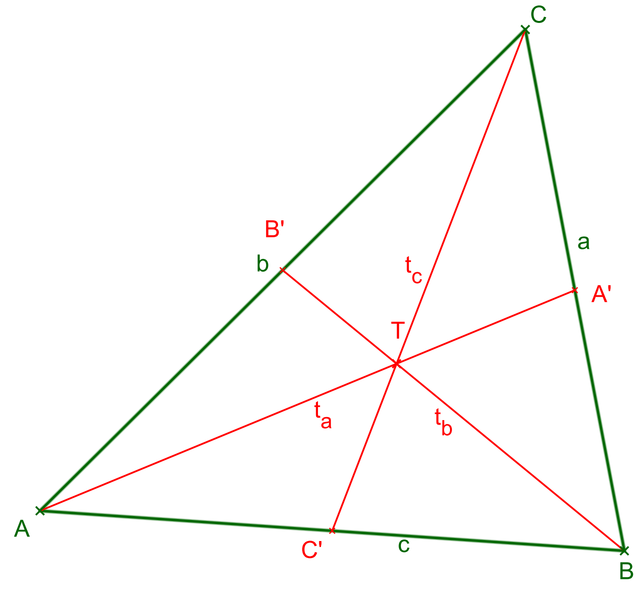
vonkajšie uhly trojuholníka (α', β', γ') – uhly jednej strany a predĺženia druhej strany (výplnkový uhol)



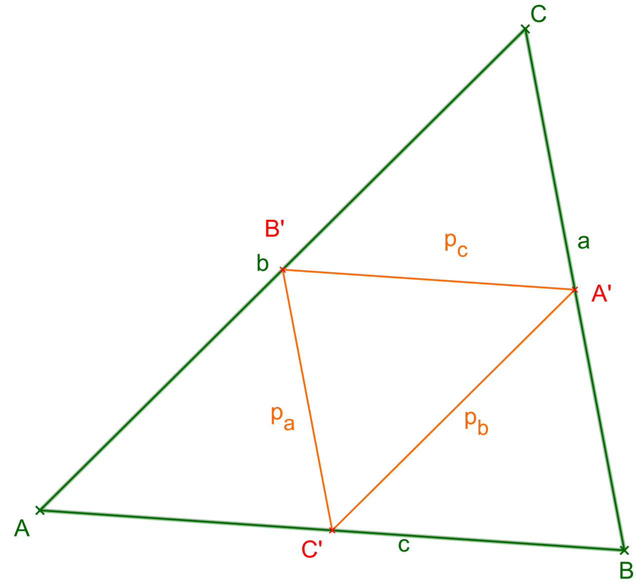
stredy strán (A', B', C')

ťažnice (t_a, t_b, t_c,) – spojnica stredov strán s protiľahlým vrcholom

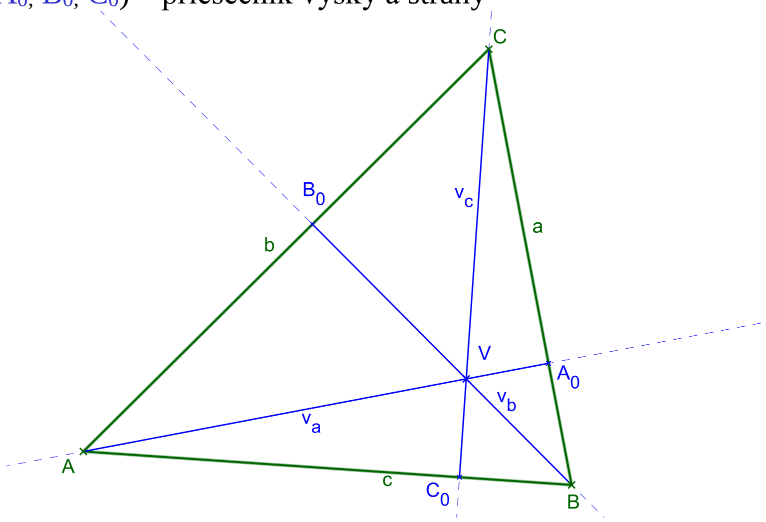
ťažisko (***stred***) ***trojuholníka*** (T) – priesečník ťažníc



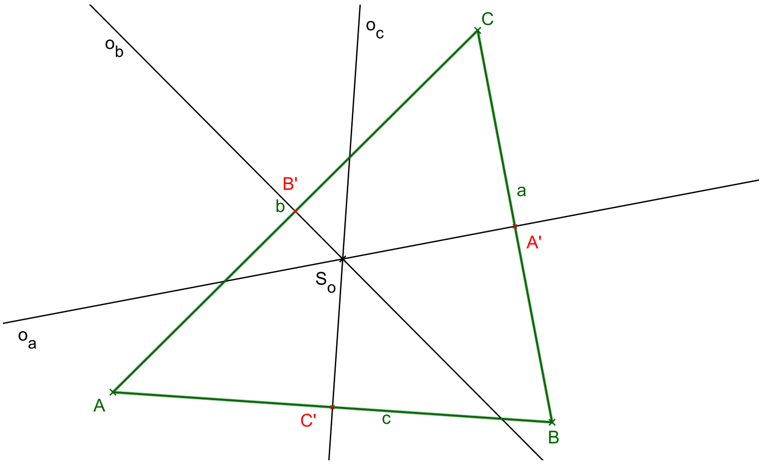
stredné priečky trojuholníka (p_a, p_b, p_c) – spojnice stredov strán: sú rovnobežné so stranami a majú polovičnú dĺžku ako strany ⇒ AC'A'B', BA'B'C', CB'C'A' sú rovnobežníky a majú rovnaké obsahy



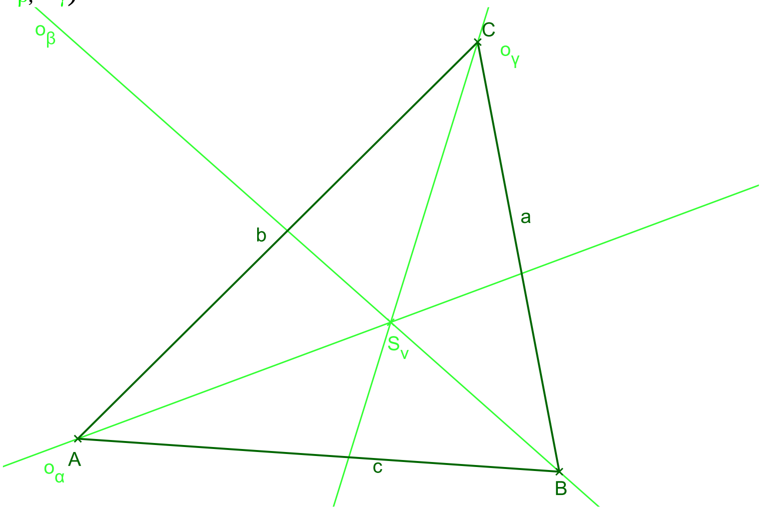
výšky trojuholníka (v_a, v_b, v_c) – kolmica z vrcholu na protiľahlú stranu
výškový bod (***ortocentrum***) ***trojuholníka*** (V) – priesečník výšok; môže byť aj mimo trojuholníka
päty výšok trojuholníka (A_0, B_0, C_0) – priesečník výšky a strany



osi strán (o_a, o_b, o_c) – kolmica v strede strany na stranu

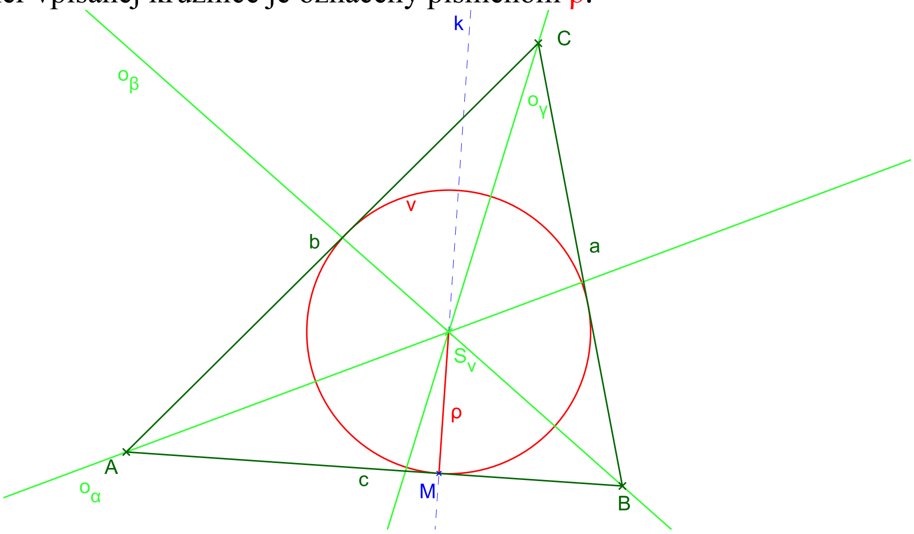


osi vnútorných uhlov (o_α, o_β, o_γ)

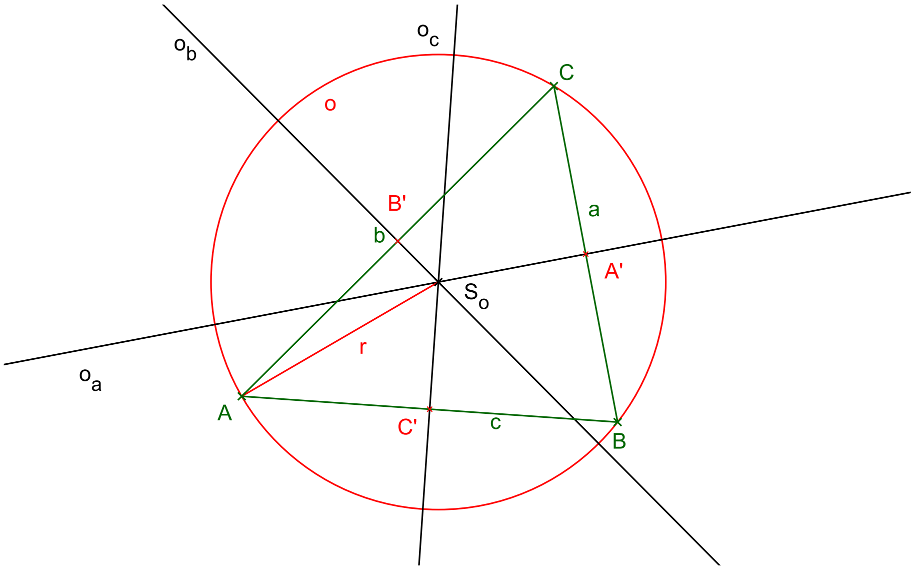


V. Ku každému trojuholníku existuje vpísaná aj opísaná kružnica.

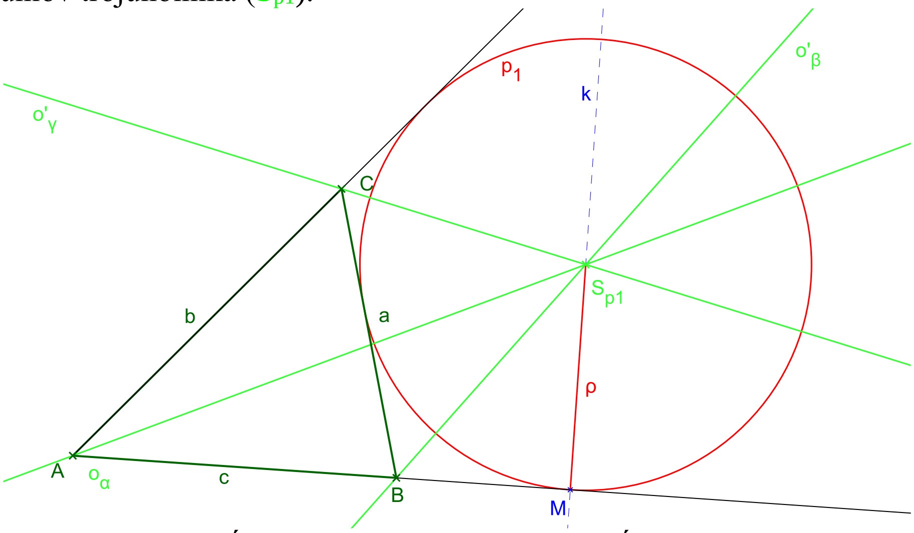
Vpísaná kružnica sa dotýka každej strany trojuholníka. Stred vpísanej kružnice je priesečník osí uhlov (S_v). Polomer vpísanej kružnice je označený písmenom ρ.



Opísaná kružnica prechádza vrcholmi trojuholníka. Stred opísanej kružnice je priesečník osí strán (S_o). Polomer opísanej kružnice je označený písmenom r.



Pripísaná kružnica (ku každej strane existuje → 3) sa dotýka jednej strany z vonkajšej strany a ďalších dvoch strán na predĺžení. Stred pripísaných kružníc je priesečník osi jedného vnútorného a dvoch vonkajších uhlov trojuholníka (S_{p1}).



V. (trojuholníková nerovnosť) Súčet dĺžok dvoch strán je viac, ako dĺžka tretej strany.

$a + b > c$ $\quad$ $a + c > b$ $\quad$ $b + c > a$

V. Súčet vnútorných uhlov trojuholníka je 180°.

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

V. Oproti dlhšej strany je väčší uhol.

$a > b \Rightarrow \alpha > \beta$

V. Vonkajší uhol sa rovná súčtu zvyšných dvoch vnútorných uhlov.

$\alpha' = \beta + \gamma$

V. Ťažisko delí ťažnice na tretiny – na dve tretiny ťažnice (dlhšia časť – od T po vrchol) a jednu tretinu ťažnice (kratšia časť – od T po stred strany) ⟶ pomer: 2 : 1

triedenie podľa vnútorných uhlov

ostrouhlý trojuholník – všetky vnútorné uhly má menšie ako 90° (výškový bod V je vo vnútri)
pravouhlý trojuholník – jeden vnútorný uhol má 90° (V je vrchol pri pravom uhle)
tupouhlý trojuholník – jeden vnútorný uhol má väčší ako 90° (V je mimo)

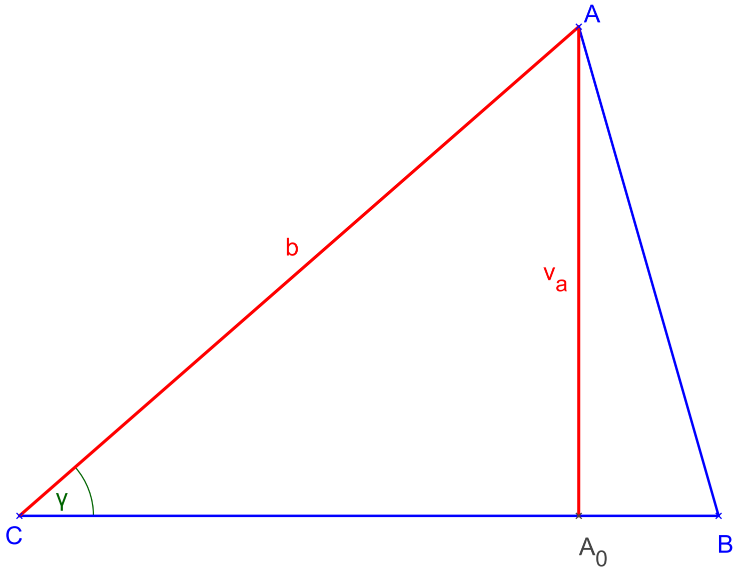
triedenie podľa strán

všeobecný trojuholník – má tri strany rôznej veľkosti
rovnoramenný trojuholník – má dve strany rovnakej veľkosti: ramená; tretia strana: základňa
dva uhly na základni sú zhodné; uhol ramien je inej veľkosti
rovnostranný (pravidelný) trojuholník – má tri strany rovnakej veľkosti ⇒ vnútorné uhly sú tiež zhodné ($\alpha = \beta = \gamma = 60°$)

1. všeobecný trojuholník

$o = a + b + c$

$$S = \frac{a.v_a}{2} = \frac{b.v_b}{2} = \frac{c.v_c}{2}$$



ak využijeme goniometrickú funkciu v pravouhlom trojuholníku ACA_0 a vyjadrime zo vzťahu výšku v_a, po dosadení dostaneme ďalší vzťah, ako vypočítať obsah z dvoch strán a nimi zovretého uhla

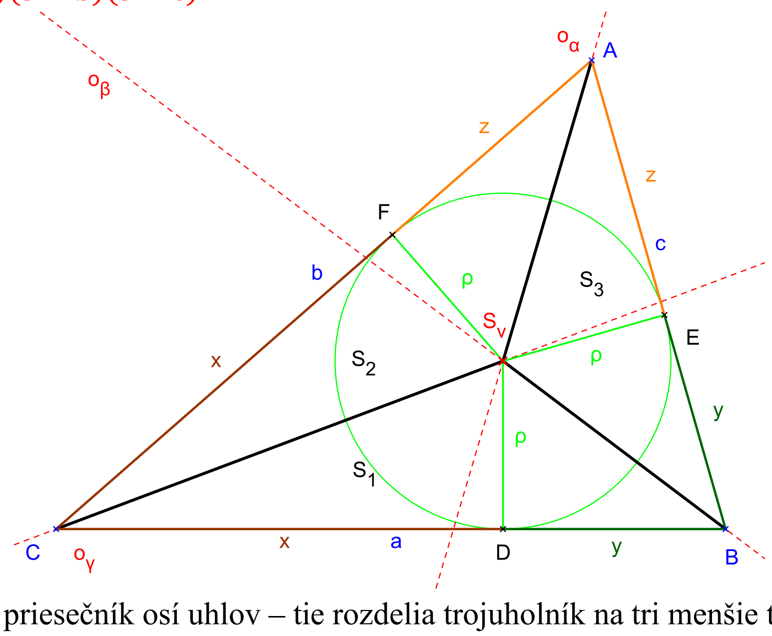
$$\sin\gamma = \frac{v_a}{b} \rightarrow v_a = b.\sin\gamma$$

$$S = \frac{ab.\sin\gamma}{2} = \frac{ac.\sin\beta}{2} = \frac{bc.\sin\alpha}{2}$$

Herónov vzorec – obsah z troch strán počítaný

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{o}{2}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



stred vpísanej kružnice je priesečník osí uhlov – tie rozdelia trojuholník na tri menšie trojuholníky s obsahmi S_1, S_2 a S_3: strana je strana veľkého trojuholníka a výška je polomer vpísanej kružnice → obsah dostaneme ako súčet týchto obsahov

$$S_1 = \frac{a.\rho}{2};\ S_2 = \frac{b.\rho}{2};\ S_3 = \frac{c.\rho}{2}$$

tieto sčítame a vyjmeme ρ, tak dostaneme vzťah na výpočet obsahu pomocou polomeru vpísanej kružnice

$$S = \frac{\rho.(a+b+c)}{2} = \frac{\rho.o}{2} = \rho.s$$

po úprave slúži na výpočet polomeru vpísanej kružnice

$$\rho = \frac{2.S}{a+b+c} = \frac{2.S}{o} = \frac{S}{s}$$

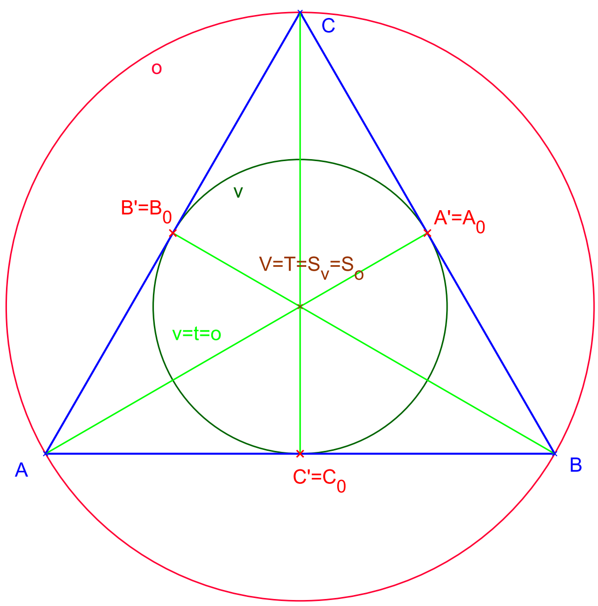
pomocou polomeru opísanej kružnice

$$S = \frac{abc}{4r}$$

po úprave slúži na výpočet polomeru opísanej kružnice

$r = \frac{abc}{4S}$

2. rovnostranný trojuholník



$o = 3a$

$S = \frac{a.v}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.a^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.v^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}.r^2 = 3\sqrt{3}.\rho^2$

výška, ťažnica, os vnútorného uhla a os strany sú zhodné ⇒ výškový bod, ťažisko, stred vpísanej a opísanej kružnice sú v jednom bode

$v = t = o = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

polomer vpísanej kružnice je tretina dĺžky ťažnice a polomer opísanej je dve tretiny dĺžky ťažnice

$\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}a \qquad r = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

3. pravouhlý trojuholník

$S = \frac{ab}{2} = \frac{cv}{2} = \frac{a^2 \operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{c^2 \sin 2\beta}{4} = r^2.\sin 2\beta$

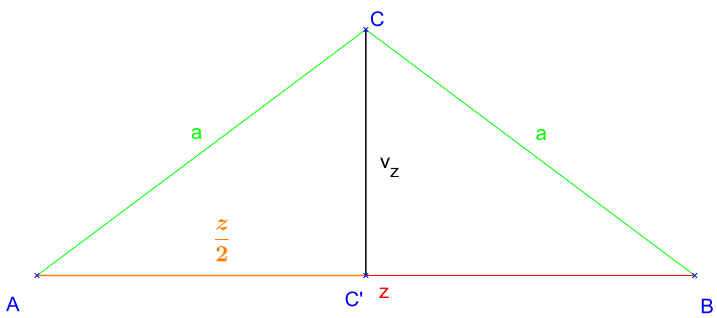
výška je iba jedna – výškou na jednu odvesnu je druhá odvesna a naopak

$v = \frac{ab}{c}$

$\rho = \frac{ab}{a+b+c} \qquad r = \frac{c}{2}$

príklad:

Vypočítajte obsah S, polomer vpísanej ρ a polomer opísanej kružnice r rovnoramennému trojuholníku, ktorého základňa je 24 a rameno 15.



výška rozpoľuje základňu ⇒ môžeme využiť Pytagorovu vetu

$v_z^2 = a^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2 = 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81$

$v_z = 9$

$S = \frac{z.v_z}{2} = \frac{24.9}{2} = 108$

$S = \frac{o.\rho}{2} \rightarrow \rho = \frac{2.S}{o} = \frac{2.108}{24+2.15} = \frac{216}{54} = 4$

$S = \frac{a.b.c}{4r} \rightarrow r = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{24.15.15}{4.108} = \frac{5\,400}{432} = 12{,}5$

Vypočítajte stranu a rovnostranného trojuholníka, ak je daný jeho obsah S = 850.

$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \rightarrow a^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}} = \frac{4.850}{\sqrt{3}} = 1\,962{,}991$

$a = 44{,}306$

Vypočítajte obsah S; výšky v_a, v_b, v_c a vnútorné uhly α, β, γ trojuholníka ABC so stranami a = 12, b = 15, c = 17.

najprv vypočítame obsah Herónovým vzorcom, a z ďalších vzorcov obsahujúcich výšky na výpočet obsahu dostaneme výšky

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+15+17}{2} = 22$

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{22.10.7.5} = \sqrt{7\,700} = 87{,}750$

$S = \frac{a.v_a}{2} \rightarrow v_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.87{,}750}{12} = 14{,}625$

$v_b = \frac{2S}{b} = \frac{2.87{,}750}{15} = 11{,}700$

$v_c = \frac{2S}{c} = \frac{2.87{,}750}{17} = 10{,}323$

použijeme vzorce, kde obsah počítame z dvoch strán a nimi zovretého uhla

$S = \frac{ab.\sin\gamma}{2} \rightarrow \sin\gamma = \frac{2S}{a.b} = \frac{2.87{,}750}{12.15} = 0{,}975\,0 \rightarrow \gamma = \sin^{-1} 0{,}975\,0 = 77°10'$

$\sin\beta = \frac{2S}{a.c} = \frac{2.87{,}750}{12.17} = 0{,}860\,3 \rightarrow \beta = \sin^{-1} 0{,}860\,3 = 59°21'$

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) = 180° - 136°31' = 43°29'$

Vypočítajte obvod o trojuholníka ABC s obsahom S = 370, ak platí a : b : c = 5 : 9 : 10.

zavedieme novú neznámu (substitúcia), aby pomer bol taký, aký má byť

$a = 5x$

$b = 9x$

$c = 10x$

$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{5x+9x+10x}{2} = 12x$

$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{12x.7x.3x.2x} = \sqrt{504x^4} = 22{,}450x^2$

$22{,}450x^2 = 370$

$x^2 = 16{,}481$

$x = 4{,}060$

$o = 24x = 24.4{,}060 = 97{,}433$